



---

## Modelo de Cálculo da Necessidade de Capital para Cobrir os Riscos de Subscrição de Operações Não Vida

**Eduardo H. Altieri**

SUSEP e Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio  
[eduardo.altieri@supep.gov.br](mailto:eduardo.altieri@supep.gov.br)

**Eduardo F. L. de Melo**

SUSEP e Instituto de Matemática e Estatística, UERJ  
[eduardo.melo@susep.gov.br](mailto:eduardo.melo@susep.gov.br)

**Alvaro L. Veiga Filho**

Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio  
[alvf@ele.puc-rio.br](mailto:alvf@ele.puc-rio.br)

---

### Resumo

Importante questão que se coloca atualmente é a capacidade de medição do capital necessário, às seguradoras, para fazer frente aos riscos que suportam no exercício de suas atividades. Esse volume de capital deve ser tal que permita à companhia suportar variabilidades no negócio. As motivações para o desenvolvimento de modelos matemáticos visando à determinação desta necessidade de capital são tanto a preocupação das próprias companhias com sua gestão de risco, como também aspectos relacionados ao estabelecimento de requerimentos de capital exigidos pelo regulador de seguro às sociedades seguradoras para fazer frente aos riscos suportados. Entre tais riscos, encontra-se a categoria dos riscos de subscrição, relacionados diretamente à operação central de uma seguradora. Este trabalho apresenta uma proposta de modelo para determinação do volume necessário de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, na qual tal categoria de riscos é segregada nos riscos de provisão de sinistros (relativo aos sinistros ocorridos) e o risco de emissão/precificação (relativo aos sinistros a ocorrer num horizonte de tempo de um ano, considerando novos negócios). O modelo proposto utiliza processos de simulação que levam em consideração a estrutura de dependência das variáveis envolvidas e linhas de negócio, fazendo uso do conceito de cópulas condicionais.

---

### Palavras-Chave

Gestão de Risco. Capital Exigidos. Riscos de Subscrição. Provisão de Sinistros.

---

### Sumário

1. Introdução. 2. Módulo 1: modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro. 3. Módulo 2: modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de emissão/precificação. 4. Execução do modelo proposto e apresentação dos resultados. 5. Considerações finais. 6. Referências bibliográficas.



## **Abstract**

---

### **Model for the Calculation of Capital Requirements to Cover the Underwriting Risks of Non-Life Activities**

**Eduardo H. Altieri**

SUSEP and Department of Electrical Engineering, (PUC-Rio)

[eduardo.altieri@supep.gov.br](mailto:eduardo.altieri@supep.gov.br)

**Eduardo F. L. de Melo**

SUSEP and Mathematics and Statistics Institute, UERJ

[eduardo.melo@susep.gov.br](mailto:eduardo.melo@susep.gov.br)

**Alvaro L. Veiga Filho**

Department of Electrical Engineering, PUC-Rio

[alvf@ele.puc-rio.br](mailto:alvf@ele.puc-rio.br)

## **Summary**

---

Today, an important question has been posed regarding the capacity of insurers to measure the capital requirement to cover the risks they bear in carrying out their activities. This amount of capital must be enough to permit a given company to sustain variability in its business. The motivations for the development of mathematical models aimed at determining the capital requirement are a concern as much for companies that want to manage their risk, as for insurance regulators involved in activities of establishing capital requirements for insurance companies to cover the risks they bear. Among such risks is the category of underwriting risk, which is directly related to the core business of an insurer. This work proposes a model for determining the appropriate amount of capital to cover the underwriting risk, in which this risk category is classified as loss provision risk (relating to incurred losses), and as writing/pricing risk (related to losses that occur in a one-year time horizon, taking into consideration new businesses). The proposed model uses simulation processes that take into account the dependence structure of the variables involved and lines of business, making use of the conditional copulas theory.

## **Key Words**

---

Risk Management. Capital Requirement. Underwriting Risk. Loss Provision.

## **Contents**

---

1. Introduction. 2. Module 1: Model for determining capital requirements to cover the loss provision risk. 3. Module 2: Model for determining the necessary capital to cover the writing/pricing risk. 4. Implementation of the proposed model and presentation of results. 5. Final considerations. 6. Bibliographical references.



## **Sinopsis**

---

### **Modelo para el Cálculo de los Requerimientos de Capital para Cubrir los Riesgos de Suscripción de Actividades No-Vida**

**Eduardo H. Altieri**

SUSEP y Departamento de Ingeniería Eléctrica, (PUC-Rio)

[eduardo.altieri@supep.gov.br](mailto:eduardo.altieri@supep.gov.br)

**Eduardo F. L. de Melo**

SUSEP e Instituto de Matemáticas y Estadísticas, UERJ

[eduardo.melo@susep.gov.br](mailto:eduardo.melo@susep.gov.br)

**Alvaro L. Veiga Filho**

Departamento de Ingeniería Eléctrica, PUC-Rio

[alvf@ele.puc-rio.br](mailto:alvf@ele.puc-rio.br)

## **Resumen**

---

Una cuestión importante que ha surgido actualmente es en cuanto a la capacidad de las aseguradoras para medir la exigencia de capital para cubrir los riesgos que soportan en el ejercicio de sus actividades. Este volumen de capital debe ser tal que permita una determinada empresa a soportar las variabilidades en su negocio. Las motivaciones para el desarrollo de modelos matemáticos destinados a determinar estos requisitos de capital son tanto la preocupación de las propias empresas con respecto a su proceso de gestión de riesgos, como también los aspectos relativos al establecimiento de los requisitos de capital exigidos por el ente regulador de seguros para las compañías de seguros, a fin de que cubran los riesgos que asumen. Entre tales riesgos, se encuentra la categoría de los riesgos de suscripción, que está directamente relacionado con la actividad principal de una compañía de seguros. Este trabajo propone un modelo para determinar la cantidad adecuada de capital para cubrir los riesgos de suscripción, en la cual esta categoría de riesgo se segrega en los riesgos de reserva de siniestros (con relación a los siniestros ocurridos) y el riesgo de emisión/tarificación (con relación a los siniestros por ocurrir en un horizonte temporal de un año, teniendo en cuenta nuevos negocios). El modelo propuesto utiliza procesos de simulación que tienen en cuenta la estructura de dependencia de las variables involucradas y las líneas de negocio, haciendo uso de la teoría de cópulas condicionales.

## **Palabras-Clave**

---

Gestión de Riesgos. Capital Exigido. Riesgos de Suscripción. Reservas de Siniestros.

## **Sumario**

---

1. Introducción. 2. Módulo 1: Modelo para la determinación de los requerimientos de capital para cubrir el riesgo de la reserva de siniestros. 3. Módulo 2: Modelo para determinar el capital necesario para cubrir el riesgo de emisión/tarificación. 4. Implementación del modelo propuesto y presentación de los resultados. 5. Consideraciones finales. 6. Referencias bibliográficas.



## 1. Introdução

Uma importante questão que se coloca atualmente, para as sociedades seguradoras, é a capacidade de medição do volume de capital necessário para fazer frente aos diversos tipos de risco que a companhia suporta no exercício de suas atividades. Como capital, entenda-se, grosso modo, o excesso de ativos sobre o passivo da companhia.

Esse volume de capital necessário deve ser tal que permita à companhia suportar variabilidades no negócio de forma que, ao longo de um horizonte de tempo estabelecido, e com uma determinada probabilidade (nível de confiança), a companhia não venha a ter o seu passivo superando os seus ativos.

Como exposto em Sandström (2011), são duas as motivações para o desenvolvimento de modelos visando à determinação deste capital necessário para fazer frente aos riscos suportados. A primeira é o interesse da própria companhia em avaliar este capital necessário, dentro de um ambiente corporativo em que haja a preocupação com a gestão de riscos. Assim, a empresa desenvolve modelos internos à companhia para tal fim, adaptados a sua realidade específica. Esses modelos buscam medir o volume de capital necessário para manter a companhia em continuado funcionamento. A este capital, determinado pela própria companhia de forma a subsidiar as suas decisões internas, damos o nome de capital econômico.

A segunda motivação vem do fato de ser imperativo ao regulador de mercado que este estabeleça níveis mínimos de capital que as companhias devam observar, a qualquer momento, para poderem operar. A este nós denominamos capital regulatório (ou requerimento de capital regulatório, ou somente, requerimento de capital). O capital regulatório não deve visar a garantir existência contínua das companhias, mas tão somente que estas sejam capazes de pagar todas as suas obrigações em uma situação de liquidação ou, ainda, de transferir sua carteira a uma companhia cessionária. Ainda, devido ao fato de que há sempre um espaço de tempo entre a constatação pelo supervisor de seguros de que a companhia está em um estado de insolvência (incapacidade de continuar operando) e a sua efetiva tomada de ação mais firme (processo de liquidação ou transferência da carteira para congêneres), o capital regulatório deve garantir ainda que, por algum horizonte de tempo estabelecido, a companhia seja capaz de pagar as suas obrigações conforme estas forem sendo devidas como, também, de subscrever novos negócios ao longo deste período.

No relatório do *Insurer Solvency Assessment Working Party* formado pela *International Actuary Association*, IAA (IAA, 2004) – cuja formação teve como motivação consulta realizada à IAA em 2002 pela *International Association of Insurance Supervisors*, IAIS – foram propostas diretrizes básicas para a avaliação de solvência de sociedades seguradoras. Entre os pontos abordados, foram levantados os principais grupos de riscos suportados pelas sociedades seguradoras em suas operações: Riscos de Subscrição, Riscos de Mercado, Riscos de Crédito e Riscos Operacionais.



Os últimos três dizem respeito aos riscos já anteriormente levantados no projeto Basiléia II, relativo ao sistema bancário, sendo os riscos de mercado e crédito associados mais aos ativos das companhias. O grupo dos riscos de subscrição foi, então, introduzido no conjunto, sendo este específico da atividade de seguros e de previdência (aqui no Brasil, também nos planos de capitalização), e mais associado ao passivo das companhias. Outra questão importante em relação à categorização dos riscos, salientada no relatório do grupo de trabalho da IAA, é a existência de interdependência entre os diferentes grupos de risco, o que requer uma abordagem integrada de avaliação.

Neste contexto, este trabalho busca desenvolver e apresentar um modelo para determinação da necessidade de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, para as operações não vida (seguro de danos e vida em grupo, custeados sob o regime financeiro de repartição) – mais especificamente, as mesmas operações abrangidas pelo artigo 5º e anexos I a III da Resolução CNSP nº 280/2013, que trata do capital de risco de subscrição (capital regulatório exigido do mercado brasileiro para fazer frente aos riscos de subscrição). Este modelo será segmentado em dois módulos, um para o “risco de provisão de sinistro” e outro para o “risco de emissão/precificação”; ou seja, considera a mesma segmentação dos riscos de subscrição admitida na modelagem da SUSEP para definição do capital de risco de subscrição.

Basicamente, a divisão dos riscos de subscrição nos dois componentes propostos visa a segregar, para efeitos de modelagem, os riscos de subscrição entre os relativos aos sinistros já ocorridos (risco de provisão de sinistros) daqueles relativos aos sinistros a ocorrer (risco de emissão/precificação).

Assim, o risco de provisão de sinistros diz respeito à variação do valor presente dos fluxos futuros de pagamentos referentes a sinistros ocorridos até a data base de avaliação, cujo valor esperado seria equivalente às provisões de sinistros ocorridos. Tal variação é devida tanto às incertezas associadas às provisões de IBNR e/ou IBNER, quanto à incerteza em relação à provisão de sinistros a liquidar, já que tanto a frequência quanto a severidade dos pagamentos futuros relativos aos sinistros ocorridos e já conhecidos pode (e certamente vai) variar, em maior ou menor grau, em relação aos valores estimados quando do conhecimento da ocorrência dos sinistros. Podemos ainda dizer que, na modelagem que será aqui proposta, na medição da variação do valor presente dos fluxos de pagamentos estaria também embutido o efeito de eventuais alterações no nível geral de tais fluxos.

Já o risco de emissão/precificação diz respeito à variação do resultado de subscrição ao longo do horizonte de tempo considerado, a partir da data base de avaliação. Como resultado de subscrição, entenda-se o resultado entre o montante de sinistros ocorridos mais despesas administrativas e operacionais, menos o prêmio ganho e receitas operacionais, todos relativos ao período dado pelo horizonte de tempo, a partir da data base de avaliação. São consideradas aqui tanto apólices emitidas até a data base quanto novos negócios subscritos ao longo do horizonte de tempo considerado. Dessa forma, o risco de emissão/precificação relaciona-se com as provisões de prêmios.



Muitas vezes, nas modelagens desenvolvidas, são determinados valores de necessidade de capital relativos a cada carteira significativa da companhia (aqui classes de negócio) e, posteriormente, tais valores são agregados considerando a dependência entre tais carteiras, através do uso de matriz de correlação. Neste modelo proposto, e assim será realizado nos seus dois módulos, a dependência entre as classes de negócio será considerada já no processo de simulação de valores possíveis das variáveis que determinam a PERDA, no Módulo 1, ou o RS (resultado de subscrição), no Módulo 2.

Resumidamente, tais simulações visam a determinar distribuições não paramétricas para a PERDA e para RS, através das quais determinamos as necessidades de capital visando suportar as duas componentes do risco de subscrição. Para cumprir o objetivo de realização de simulações considerando a dependência entre as classes de negócio, será utilizado o conceito de cópulas, em especial o de cópula condicional.

Por fim, consideraremos o horizonte de tempo de um ano, em linha com o adotado no projeto Solvência II. Outra questão importante é que consideraremos, na abordagem aqui apresentada, prêmios e sinistros líquidos de resseguro. Dessa forma, o modelo aqui proposto fica desobrigado a lidar com o risco de default do ressegurador, o que é desejável, já que tal risco faz parte da categoria dos riscos de crédito.

## **2. Módulo 1: modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro**

O objetivo inicial aqui é determinar uma distribuição para o valor presente dos fluxos futuros de pagamentos relativos a sinistros ocorridos, que doravante, para facilitar, chamaremos de PERDA, cujo valor esperado é equivalente às provisões de sinistros ocorridos a serem formadas pela companhia. A necessidade de capital será determinada com base em uma medida de risco desta distribuição, sendo estabelecida como o excesso desta medida de risco (em função da volatilidade da distribuição) em relação ao valor esperado, funcionando assim como um “colchão” destinado a absorver os naturais desvios do montante de pagamentos efetivamente realizados em relação aos valores provisionados, fruto da natureza aleatória da PERDA.

### **Medida de risco**

Uma primeira medida de risco que poderia ser considerada seria o “*Value at Risk*” (VaR), amplamente utilizado nos modelos desenvolvidos para o estabelecimento de requerimentos de capital regulatório para o setor bancário. Entretanto, no modelo proposto neste trabalho, a opção foi por utilizar outra medida de risco, o “*Tail VaR*” (TVaR), sendo este brevemente definido na seção 5.53 do relatório IAA (2004) como “o quantil VaR mais a média dos excessos em relação a este quantil”; assim, o  $TVaR_{\alpha}$  está diretamente relacionado ao  $VaR_{\alpha}$ .

A motivação para o uso do TVaR ao invés do VaR é o fato de este último possuir algumas características que não o qualificam como medida de risco coerente – para maiores detalhes acerca da preferência do uso de medidas de risco coerentes, ver os trabalhos citados no primeiro parágrafo desta seção. Ainda, conforme exposto na seção 5.24 do relatório IAA (2004), em especial quando se trata de distribuições



assimétricas e com caudas pesadas, o TVaR é preferível ao VaR como medida de risco, tendo em vista que é mais sensível à possibilidade de perdas catastróficas (de rara frequência, mas de grande valor).

### Triângulo de Run-off

Para a determinação da distribuição desejada, utilizaremos como base o triângulo de *run-off*, cuja função é resumir a experiência de sinistros observada em uma particular classe de negócio de uma seguradora. Para tanto, os montantes de valores pagos relativos a sinistros ocorridos são dispostos em uma estrutura de tabela na qual aparecem classificados por período de ocorrência dos sinistros, representados pelas linhas, e por prazo de desenvolvimento do pagamento, representado pelas colunas. Por prazo de desenvolvimento do pagamento entendemos como a quantidade de períodos, a partir do período de ocorrência, no qual se deu o pagamento.

Para uma dada classe de negócio  $c = 1, \dots, C$ , podemos estabelecer a seguinte descrição para o triângulo de *run-off* com os montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos:

**Tabela 1** – Triângulo de *run-off* com os montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$m_{c,1,1}$	$m_{c,1,2}$	$m_{c,1,3}$	...	$m_{c,1,P-2}$	$m_{c,1,P-1}$	$m_{c,1,P}$
2	$m_{c,2,1}$	$m_{c,2,2}$	$m_{c,2,3}$	...	$m_{c,2,P-2}$	$m_{c,2,P-1}$	
3	$m_{c,3,1}$	$m_{c,3,2}$	$m_{c,3,3}$	...	$m_{c,3,P-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
P-2	$m_{c,P-2,1}$	$m_{c,P-2,2}$	$m_{c,P-2,3}$				
P-1	$m_{c,P-1,1}$	$m_{c,P-1,2}$					
P	$m_{c,P,1}$						

Trabalharemos aqui com o período  $i$  em trimestres. O objetivo é termos uma segmentação dos dados maior do que aquela que teríamos caso de considerássemos os períodos em anos, mas ao mesmo tempo mantendo massa de dados mais satisfatória nas células do triângulo do que se trabalhássemos com períodos em meses, em especial para classes de negócios não massificadas.

Com os dados observados de pagamentos estruturados na forma do triângulo de *run-off*, o objetivo passa a ser inferir sobre os valores de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos, ou seja, sobre os valores abaixo do triângulo. Estes valores serão representados pelas variáveis aleatórias  $M_{c,i,j}$  dispostas na tabela a seguir. Os índices  $c$ ,  $i$  e  $j$  são os mesmos já descritos.



**Tabela 2** – Valores de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)					
	1	2	3	P-2	P-1	P
1						
2						$M_{c,2,P}$
3					$M_{c,3,P-1}$	$M_{c,3,P}$
⋮				⋮	⋮	⋮
P-2				$M_{c,P-2,P-2}$	$M_{c,P-2,P-1}$	$M_{c,P-2,P}$
P-1			$M_{c,P-1,3}$	$M_{c,P-1,P-2}$	$M_{c,P-1,P-1}$	$M_{c,P-1,P}$
P		$M_{c,P,2}$	$M_{c,P,3}$	$M_{c,P,P-2}$	$M_{c,P,P-1}$	$M_{c,P,P}$

### Simulação de valores para a PERDA

Nos métodos de determinação de provisões de sinistros ocorridos que se utilizam dos triângulos de *run-off* o objetivo resume-se em realizar previsões para as variáveis aleatórias acima, que denominaremos de “triângulo inferior”. Aqui, nosso objetivo será o de, via processo de simulação que leve em consideração a estrutura de dependência existente entre as classes de negócio, gerar S possíveis observações do triângulo inferior para cada classe de negócio, permitindo com isso gerar S possíveis observações para a PERDA e, consequentemente, a obtenção de uma distribuição não paramétrica para a PERDA. Para tanto, consideraremos as seguintes relações:

$$(1) FP_{s,c,k} = \sum_{i+j=k+P+1} M_{s,c,i,j}$$

$$(2) PERDA_{s,c} = \sum_{k=1}^{P-1} FP_{s,c,k} * d_k$$

$$(3) PERDA_s = \sum_{c=1}^C PERDA_{s,c}$$

Onde:

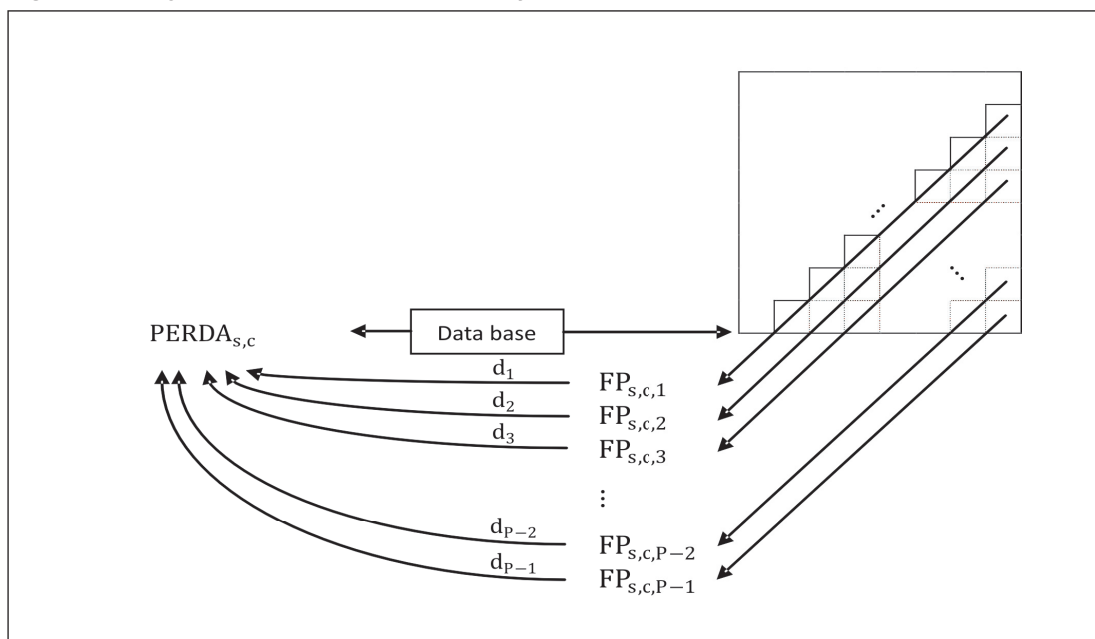
- $s = 1, \dots, S$  Simulação. Indica cada uma das S simulações do triângulo inferior.
- $c = 1, \dots, C$  Classe de negócio.
- $k = 1, \dots, P-1$  Período de pagamento. Representa o período, a partir da data base de avaliação, no qual é realizado o desembolso do fluxo de pagamento  $FP_{s,c,k}$ . Cada k está relacionado a uma diagonal do triângulo inferior.
- $i = 2, \dots, P$  Período de ocorrência do sinistro.
- $j = P-i+2, \dots, P$  Prazo de desenvolvimento.
- $M_{s,c,i,j}$  Simulação de índice s da variável aleatória  $M_{c,i,j}$ , conforme anteriormente definida, componente do triângulo inferior.



$FP_{s,c,k}$	Fluxo simulado de pagamentos realizados no período $k$ , relativo à classe de negócio $c$ .
$d_k$	Fator de desconto relativo ao período $k$ .
$PERDA_{s,c}$	Simulação de índice $s$ da PERDA relativa à classe de negócio $c$ , posicionada na data base.
$PERDA_s$	Simulação de índice $s$ da PERDA total da companhia, posicionada na data base.

O diagrama a seguir descreve, de forma gráfica, o efeito das relações (1) e (2), para cada simulação  $s$  do triângulo inferior relativo a cada classe de negócio  $c$ .

**Figura 1** – Diagrama com o processo de formação da PERDA



Ou seja, os valores das diagonais do triângulo inferior representam os montantes de pagamentos realizados no período  $k$  seguinte à data base. Assim, a soma dos valores das diagonais representa o fluxo total de pagamentos de sinistros realizados no mês  $k$  seguinte à data base. Totalizando estes fluxos, descontados pelos respectivos fatores de desconto, chegamos ao valor simulado para a PERDA relativa à classe de negócio  $c$ . A PERDA total simulada é a soma dos valores de PERDA simulados para cada classe de negócio.

Posteriormente, será descrito o processo de simulação que permite a geração dos  $S$  valores dos triângulos inferiores de cada classe de negócio  $c$ , obedecendo à estrutura de dependência existente entre as  $C$  classes de negócio consideradas.



**Fator de  
desconto**

Os fluxos de pagamentos futuros são descontados a valor presente considerando uma curva de desconto, vigente na data da avaliação, construída com base em uma estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ) livre de riscos (de crédito e liquidez) definida para o cupom de IPCA. Os valores aqui utilizados foram definidos com base nas curvas de juros estimadas pela Superintendência Nacional de Seguros Privados e disposta no portal de internet da Autarquia, em <http://www.susep.gov.br/setores-susep/cgsoa/coris/dicem/modelo-de-interpolacao-e-extrapolacao-da-ettj>. Tais curvas baseiam-se nos modelos definidos em Franklin *et al.* (2011).

**Distribuição  
para a PERDA  
e determinação  
da necessidade  
de capital**

Com base nos  $S$  valores simulados para a PERDA, obtemos uma distribuição não paramétrica para esta variável. Para tanto, os valores são ordenados, e aquele cujo número de valores superiores representam  $\alpha\%$  dos  $S$  valores simulados é considerado o  $VaR_{\alpha}$  amostral. Por sua vez, o  $TVaR_{\alpha}$  amostral é determinado como a média dos valores superiores ao  $VaR_{\alpha}$  amostral.

A necessidade de capital é determinada, então, como a diferença entre o  $TVaR_{\alpha}$  amostral e o valor esperado amostral da PERDA (calculado como a média de todos os  $S$  valores gerados), este fazendo as vezes da provisão de sinistros ocorridos. Calculada dessa forma, a necessidade de capital representa uma estimativa do valor adicional às provisões que a companhia deve possuir de forma que, com uma confiança de  $\alpha\%$ , o valor a ser efetivamente realizado de pagamentos de sinistros não venha a ser superior ao valor provisionado mais o colchão determinado pelo valor da necessidade de capital.

**Triângulo  
de *run-off* de  
números  
de pagamentos**

De forma idêntica aos montantes de pagamentos, estabelecemos também, para cada classe de negócio, um triângulo de *run-off* com os números de pagamentos relativos a sinistros ocorridos. A motivação é que tais triângulos serão utilizados no modelo estocástico a ser estabelecido para as variáveis aleatórias  $M_{c,i,j}$ .



**Tabela 3** – Pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$n_{c,1,1}$	$n_{c,1,2}$	$n_{c,1,3}$	...	$n_{c,1,P-2}$	$n_{c,1,P-1}$	$n_{c,1,P}$
2	$n_{c,2,1}$	$n_{c,2,2}$	$n_{c,2,3}$	...	$n_{c,2,P-2}$	$n_{c,2,P-1}$	
3	$n_{c,3,1}$	$n_{c,3,2}$	$n_{c,3,3}$	...	$n_{c,3,P-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
P-2	$n_{c,P-2,1}$	$n_{c,P-2,2}$	$n_{c,P-2,3}$				
P-1	$n_{c,P-1,1}$	$n_{c,P-1,2}$					
P	$n_{c,P,1}$						

Da mesma forma temos, por classe de negócio, o triângulo inferior de números de pagamentos de sinistros:

**Tabela 4** – Números de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1							$N_{c,2,P}$
2						$N_{c,3,P-1}$	$N_{c,3,P}$
3							
⋮				⋮	⋮	⋮	⋮
P-2				...	$N_{c,P-2,P-2}$	$N_{c,P-2,P-1}$	$N_{c,P-2,P}$
P-1			$N_{c,P-1,3}$	...	$N_{c,P-1,P-2}$	$N_{c,P-1,P-1}$	$N_{c,P-1,P}$
P		$N_{c,P,2}$	$N_{c,P,3}$	...	$N_{c,P,P-2}$	$N_{c,P,P-1}$	$N_{c,P,P}$



**Modelos  
estocásticos  
ajustados  
para  $M_{c,i,j}$  e  $N_{c,i,j}$**

De forma a possibilitar a simulação de  $S$  pares de triângulos inferiores para cada classe de negócio  $c$ , foi definida a seguinte modelagem estocástica para as variáveis  $M_{c,i,j}$  e  $N_{c,i,j}$ .

• **Modelo para  $M_{c,i,j}$ :**

$$\ln(M_{c,i,j}) \sim N\left(\ln^{(M)}\mu_{c,i,j}, \ln^{(M)}\sigma_c^2 | c, i, j, N_{c,i,j}\right)$$

$$E\left(\ln(M_{c,i,j})\right) = \ln^{(M)}\mu_{c,i,j} = \ln^{(M)}_0\beta_c + \ln^{(M)}_1\beta_{c,i} + \ln^{(M)}_2\beta_{c,j} + \ln^{(M)}_3\beta_c \cdot \ln(N_{c,i,j})$$

$$\ln^{(M)}_1\beta_{c,1} = 0 ; \ln^{(M)}_2\beta_{c,1} = 0$$

• **Modelo para  $N_{c,i,j}$ :**

$$N_{c,i,j} \sim \text{ODPoisson}\left({}^N\lambda_{c,i,j}, {}^N\phi_c | c, i, j\right)$$

$$\ln\left(E(N_{c,i,j})\right) = \ln({}^N\lambda_{c,i,j}) = {}^N_0\beta_c + {}^N_1\beta_{c,i} + {}^N_2\beta_{c,j}$$

$${}^N_1\beta_{c,1} = 0 ; {}^N_2\beta_{c,1} = 0$$

Onde  $\ln^{(M)}\mu_{c,i,j}$  e  ${}^N\lambda_{c,i,j}$  são os valores esperados de  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$ , respectivamente.

Pode-se dizer que o uso dos modelos estocásticos aqui propostos para os triângulos têm inspiração nas exposições realizadas na seção 10.3 de Kaas *et al.* (2008).

A diferença da distribuição de Poisson com sobredispersão, aqui considerada, para a Poisson tradicional, é que se admite variância proporcional ao valor esperado. A proporcionalidade é dada pelo parâmetro de dispersão  $\phi$  (da forma geral da função de probabilidade de uma distribuição pertencente à família exponencial, caso da Poisson), permitindo que ele seja diferente de 1. Tal modelagem permite um melhor ajuste à variabilidade observada dos dados, muitas vezes maior que aquela predita pela distribuição Poisson; este fato é chamado de sobredispersão (em língua inglesa, de *overdispersion*).

Uma boa fonte de informações sobre modelagem GLM considerando distribuições do tipo Poisson com sobredispersão é England and Verrall (2002). Na seção 6.3 de Jong e Heller (2008) podem ser obtidas informações sobre estimação por quase verossimilhança sendo aplicada em situações de modelagem por distribuição de Poisson com presença de sobredispersão. Mais informações sobre distribuições de Poisson com sobredispersão podem também ser obtidas nos exemplos 9.4.2 e 11.3.8 contidos em Kaas *et al.* (2008).

Em relação aos condicionamentos apresentados na formulação do modelo ( ${}^{(\ln(M))}\beta_{c,1}$ ,  ${}^{(\ln(M))}\beta_{c,1}$ ,  ${}^N\beta_{c,1}$  e  ${}^N\beta_{c,1}$  iguais a zero), são necessários para evitar problemas de identificação (multicolinearidade), prejudicando a estimação (ver Remark 9.3.2 de Kaas *et al.*, 2008; ver também seção 4.14 de Jong e Heller, 2008).

## Processo de simulação

Começamos por observar que simular  $S$  possíveis observações do par de triângulos inferiores de cada classe de negócio  $c$  equivale a simular  $S$  observações para cada uma das variáveis aleatórias  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$ , com  $c = 1, \dots, C$ ,  $i = 2, \dots, P$  e  $(P-i+1) < j \leq P$ , o que pode ser realizado considerando-se as relações:

$$\ln(M_{c,i,j}) = {}^{(\ln(M))}F_{c,i,j}^{-1}({}^{(\ln(M))}U_{c,i,j} | c, i, j, N_{c,i,j})$$

$$N_{c,i,j} = {}^NF_{c,i,j}^{-1}({}^NU_{c,i,j} | c, i, j)$$

Com  $c = 1, \dots, C$ ,  $i = 2, \dots, P$  e  $(P-i+1) < j \leq P$ .

Onde, além dos termos já anteriormente definidos, temos:

${}^{(\ln(M))}F_{c,i,j}$  É a função de distribuição acumulada de  $\ln(M_{c,i,j})$ , condicional a  $c$ ,  $i$ ,  $j$  e  $N_{c,i,j}$ , estimada através do ajuste do modelo proposto considerando os dados do triângulo de *run-off* de montantes de pagamentos de sinistros relativo à classe de negócio  $c$ .

${}^NF_{c,i,j}$  É a função de distribuição acumulada de  $N_{c,i,j}$ , condicional a  $c$ ,  $i$  e  $j$ , estimada através do ajuste do modelo proposto considerando os dados do triângulo de *run-off* de números de pagamentos de sinistros relativo à classe de negócio  $c$ .

${}^{(\ln(M))}U_{c,i,j}$  e  ${}^NU_{c,i,j}$  Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

O problema, então, passa a ser simular  $S$  observações de cada uma das variáveis aleatórias  ${}^{(\ln(M))}U_{c,i,j}$  e  ${}^NU_{c,i,j}$ , com  $c = 1, \dots, C$ ,  $i = 2, \dots, P$  e  $(P-i+1) < j \leq P$ . Ainda, a estrutura de dependência entre as variáveis deve ser respeitada.

A ideia que se apresenta, então, é a de considerar que as relações entre as variáveis aleatórias que compõem cada triângulo em questão (de montante de pagamentos e de número de pagamentos, por carteira  $c$ ) já estariam explicadas pelo modelo linear generalizado ajustado. Assim, faltaria levar em consideração a relação existente entre as classes de negócio. Para aplicarmos tal ideia, faremos o uso de cópulas condicionais.



Aqui faremos uma adaptação do conceito de cópula condicional, apresentado em Cherubini *et al.* (2004) num contexto de série temporal, para um contexto no qual as variáveis aleatórias de interesse são componentes de triângulos de desenvolvimento de pagamento de sinistros (ou seja, indexadas pela combinação entre período de ocorrência e prazo de desenvolvimento).

Dessa forma, para cada uma das  $\binom{P}{2}$  combinações de  $i$  e  $j$ , com  $i = 2, \dots, P$  e  $(P - i + 1) < j \leq P$ , podemos considerar a existência das FDAs multivariadas  $F_{i,j}$  e das cópulas condicionais  $\mathbb{C}_{i,j}$ , tais que:

$$F_{2,P}(\ln(M_{1,2,P}), N_{1,2,P}, \dots, \ln(M_{C,2,P}), N_{C,2,P}) = \mathbb{C}_{2,P}(\overset{\ln(M)}{U}_{1,2,P}, \overset{N}{U}_{1,2,P}, \dots, \overset{\ln(M)}{U}_{C,2,P}, \overset{N}{U}_{C,2,P})$$

$$\vdots$$

$$F_{P,P}(\ln(M_{1,P,P}), N_{1,P,P}, \dots, \ln(M_{C,P,P}), N_{C,P,P}) = \mathbb{C}_{P,P}(\overset{\ln(M)}{U}_{1,P,P}, \overset{N}{U}_{1,P,P}, \dots, \overset{\ln(M)}{U}_{C,P,P}, \overset{N}{U}_{C,P,P})$$

$\begin{array}{cc} i & j \end{array}$

2	P
3	P-1
3	P
4	P-2
4	P-1
4	P
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
P	2
$\vdots$	$\vdots$
P	P

Onde o conjunto condicionante é aqui determinado pelo par  $(i,j)$ . Ainda, assumiremos as seguintes premissas:

1. Podemos admitir estruturas de dependência Gaussianas, ou seja, as funções  $\mathbb{C}_{i,j}$  são cópulas Gaussianas condicionais com parâmetros  $\rho_{i,j}$ ;
2. Podemos considerar o caso degenerado, ou seja,  $\mathbb{C}_{i,j} = \mathbb{C}$  e, consequentemente,  $\rho_{i,j} = \rho$ .

Adotadas tais premissas, podemos simular  $S * \binom{P}{2}$  observações da cópula dada pelo vetor aleatório  $(\overset{\ln(M)}{U}_1, \overset{N}{U}_1, \dots, \overset{\ln(M)}{U}_C, \overset{N}{U}_C)$ , com distribuição dada por  $\mathbb{C}$ , permitindo-nos com isso gerar as  $S$  observações do par de triângulos inferiores relativo a cada classe de negócio  $c$ .

O processo descrito no parágrafo anterior pode ser realizado seguindo-se os seguintes passos:

- 1) Definimos a matriz **A** a seguir, composta com os valores observados do par de triângulos de *run-off* de cada classe de negócio  $c$ :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & c = 1 & \dots & c = C \\
 \hline
 \begin{bmatrix}
 \ln^{(M)}F_{1,1,1}(\ln(m_{1,1,1})) & N_{F_{1,1,1}}(n_{1,1,1}) & \dots & \ln^{(M)}F_{C,1,1}(\ln(m_{C,1,1})) & N_{F_{C,1,1}}(m_{C,1,1}) \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \ln^{(M)}F_{1,P,1}(\ln(m_{1,P,1})) & N_{F_{1,P,1}}(n_{1,P,1}) & \dots & \ln^{(M)}F_{C,P,1}(\ln(m_{C,P,1})) & N_{F_{C,P,1}}(m_{C,P,1})
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 i & j \\
 \hline
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & P \\
 2 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 2 & P-1 \\
 3 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 3 & P-2 \\
 \vdots & \vdots \\
 P & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Cada classe de negócio  $c$  está representada por duas colunas na matriz **A**, uma relativa ao triângulo de *run-off* de montantes de pagamentos e outra ao triângulo de *run-off* de números de pagamentos. Ainda, cada linha da matriz **A** pode ser interpretada como uma observação da cópula dada pelo vetor aleatório  $(\ln^{(M)}U_1, N_{U_1}, \dots, \ln^{(M)}U_C, N_{U_C})^T$  com distribuição dada por  $\mathbb{C}$ , onde  $\mathbb{C}$  é uma função cópula Gaussiana com parâmetro  $\rho$ .

- 2) Definimos a matriz **B** a seguir, composta pela aplicação do inverso da FDA normal padrão,  $\Phi^{-1}$ , em cada um dos elementos da matriz **A**, o que equivale à matriz:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & c = 1 & \dots & c = C \\
 \hline
 \begin{bmatrix}
 \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{1,1,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{1,1,1}}) & \dots & \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{C,1,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{C,1,1}}) \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{1,P,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{1,P,1}}) & \dots & \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{C,P,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{C,P,1}})
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 i & j \\
 \hline
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & P \\
 2 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 2 & P-1 \\
 3 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 3 & P-2 \\
 \vdots & \vdots \\
 P & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$



Onde cada vetor  $(\ln^{(M)}u_{1,i,j}, {}^Nu_{1,i,j}, \dots, \ln^{(M)}u_{C,i,j}, {}^Nu_{C,i,j})'$ , com  $i = 1, \dots, P$  e  $1 \leq j \leq (P-i+1)$ , representa uma observação da cópula  $(\ln^{(M)}U_1, {}^NU_1, \dots, \ln^{(M)}U_C, {}^NU_C)'$ .

A matriz de correlação amostral  $\hat{\rho}$ , calculada com base nas colunas da matriz **B**, pode então ser vista como uma estimativa do parâmetro  $\rho$ .

- 3) Geramos  $S * \binom{P}{2}$  observações do vetor normal padrão multivariado  $(\ln^{(M)}X_1, {}^NX_1, \dots, \ln^{(M)}X_C, {}^NX_C)'$ , com correlação dada por  $\hat{\rho}$ .
- 4) Aplicando em cada observação do vetor normal padrão multivariado a transformação  $(\ln^{(M)}U_1, {}^NU_1, \dots, \ln^{(M)}U_C, {}^NU_C)' = (\Phi(\ln^{(M)}X_1), \Phi({}^NX_1), \dots, \Phi(\ln^{(M)}X_C), \Phi({}^NX_C))'$ , temos então as  $S * \binom{P}{2}$  observações da cópula Gaussiana.
- 5) Por fim, agrupando as observações geradas no passo anterior em  $\binom{P}{2}$  grupos de S, conseguimos gerar S observações de cada uma das linhas da matriz **C** abaixo.

$c = 1$		...	$c = C$		$i$	$j$
$\ln(M_{1,2,P})$	$N_{1,2,P}$	...	$\ln(M_{C,2,P})$	$N_{C,2,P}$	2	P
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	3	P-1
					3	P
					4	P-2
					4	P-1
					4	P
					$\vdots$	$\vdots$
					P	2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\ln(M_{1,P,P})$	$N_{1,P,P}$	...	$\ln(M_{C,P,P})$	$N_{C,P,P}$	P	P

Como cada coluna da matriz **C** representa um dos triângulos inferiores que desejávamos gerar, alcançamos então nosso objetivo.





### 3. Módulo 2: modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de emissão/precificação

Aqui o objetivo é determinarmos uma distribuição para o resultado de subscrição, a ser observado no período dado pelo horizonte de tempo de um ano a partir da data base de avaliação, que doravante chamaremos de RS, dado por:

$$RS = (SO + DA) - (PG + ORDOP)$$

Onde:

- SO Montante total a ser pago por sinistros cuja ocorrência se dá ao longo do período dado pelo horizonte de tempo de um ano a partir da data base.
- DA Despesa administrativa observada ao longo do horizonte de tempo de um ano a partir da data base.
- PG Prêmio ganho ao longo do horizonte de tempo de um ano a partir da data base. Representa o prêmio cobrado para fazer frente aos riscos cobertos ao longo do período dado pelo horizonte de tempo.
- ORDOP Outras despesas e receitas operacionais, observado ao longo do horizonte de tempo de um ano a partir da data base.

O RS é posicionado na data base de avaliação. Observar que, aqui, o RS está sendo avaliado pelo ângulo da situação negativa que se quer evitar. Assim, valores positivos do RS significam resultados adversos e os negativos, consequentemente, os favoráveis.

Considerando o exposto em Sandström (2011), que por sua vez segue Hürlimann (2008), devido ao princípio da equivalência atuarial,  $E(RS) = 0$ . Logo, podemos tomar a necessidade de capital para fazer frente ao risco de prêmio diretamente igual a uma medida de risco da distribuição de RS, dado um nível de confiança  $\alpha$  considerado.

Tomaremos como medida de risco o TVaR, pelos mesmos motivos já expostos quando tratamos do módulo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistros.

Ainda, como horizonte de tempo, tomamos o período de um ano, pois, conforme estabelecido em IAA (2004), considera-se razoável a adoção de um ano como horizonte de tempo para fins de avaliação de solvência.



## Simulação de valores para RS

Os dados relativos às variáveis consideradas na formulação do RS geralmente estão disponíveis em períodos menores que um ano. Ainda, as variáveis SO e PG podem ser observadas por classe de negócio. Assim, segmentando o horizonte de tempo de um ano a partir da data base em K períodos iguais, tanto RS quanto as variáveis que o compõem podem ser redefinidas como:

$SO_{c,k}$	Montante total a ser pago por sinistros cuja ocorrência se dá ao longo do período k, relativo à classe de negócio c. É líquido da parcela a ser recuperada em resseguros e inclui parcelas a serem pagas referentes a riscos aceitos em retrocessão.
$PG_{c,k}$	Prêmio ganho ao longo do período k, relativo à classe de negócio c. Representa o prêmio cobrado para fazer frente aos riscos cobertos ao longo do período k, estes líquidos dos riscos cedidos em resseguro e incluindo os riscos aceitos em retrocessão. É líquido de cancelamentos.
$DA_k$	Despesa administrativa observada ao longo do período k.
$ORDOP_k$	$RO_k - DO_k$ , denominada "outras despesas e receitas operacionais", observada ao longo do período k.
$RS_k$	Resultado de subscrição do período k.

Onde:

$c = 1, \dots, C$	Classe de negócio.
$k = P+1, \dots, P+K$	Representa cada um dos K períodos futuros nos quais o horizonte de tempo de um ano a partir da data base de avaliação foi segmentado. P representa o último período de dados observados anterior à data base.

Assim, o objetivo de determinar uma distribuição para RS pode ser alcançado através da geração, via processo de simulação, de S possíveis observações de cada uma das variáveis que compõem a formulação do RS, em cada um destes K períodos futuros. Tais observações simuladas, aplicadas à reformulação da variável RS dada pelas relações apresentadas a seguir, nos permite obter S possíveis observações do RS, definindo uma distribuição não paramétrica para tal variável.

$$(1) \quad RS_{s,k} = \left( \sum_{c=1}^C SO_{s,c,k} + DA_{s,k} \right) - \left( \sum_{c=1}^C PG_{s,c,k} + ORDOP_{s,k} \right)$$

$$(2) \quad RS_s = \sum_{k=1}^K RS_{s,k} * d_k$$

Onde:

$s = 1, \dots, S$	Simulação. Indica cada uma das S simulações do valor referente ao período futuro k de cada uma das variáveis componentes da formulação de RS.
$c = 1, \dots, C$	Classe de negócio.
$k = P+1, \dots, P+K$	Representa cada um dos K períodos futuros nos quais o horizonte de tempo de um ano foi segmentado.
$SO_{s,c,k}$	Simulação de índice s da variável aleatória $SO_{c,k}$ .



$PG_{s,c,k}$	Simulação de índice $s$ da variável aleatória $PG_{c,k}$ .
$DA_{s,k}$	Simulação de índice $s$ da variável aleatória $DA_k$ .
$ORDOP_{s,k}$	Simulação de índice $s$ da variável aleatória $ORDOP_k$ .
$d_k$	Fator de desconto relativo ao período $k$ . São os mesmos valores considerados no modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de reserva.
$RS_{s,k}$	Simulação de índice $s$ do resultado de subscrição da companhia relativo ao período $k$ .
$RS_s$	Simulação de índice $s$ do resultado de subscrição da companhia, referente ao horizonte de tempo de um ano, posicionado na data base.

Além das variáveis aleatórias  $SO_{c,k}$ ,  $PG_{c,k}$ ,  $DA_k$  e  $ORDOP_k$ , também serão simuladas  $S$  observações, para cada um dos  $K$  períodos futuros, referentes às variáveis  $NSO_{c,k}$  e  $NE_{c,k}$ , definidas como:

$NSO_{c,k}$	Número de pagamentos relativos a sinistros cuja ocorrência se dá ao longo do período $k$ , relativo à classe de negócio $c$ .
$NE_{c,k}$	Número de expostos ao longo do período $k$ , relativo à classe de negócio $c$ . O número de expostos é dado pela soma das exposições individuais ao risco, cujo conceito pode ser encontrado no Apêndice 1 de Ferreira (2005).

As variáveis  $NSO_{c,k}$  e  $NE_{c,k}$  são necessárias pois serão consideradas no processo de simulação das variáveis que compõem o  $RS$ . Assim, também teremos:

$NSO_{s,c,k}$	Simulação de índice $s$ da variável aleatória $NSO_{c,k}$ .
$NE_{s,c,k}$	Simulação de índice $s$ da variável aleatória $NE_{c,k}$ .

Fixado um período futuro  $k$ , cada valor simulado de índice  $s$  do vetor aleatório  $(NSO_{1,k}, \dots, NSO_{C,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{C,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{C,k}, NE_{1,k}, \dots, NE_{C,k}, DA_k, ORDOP_k)'$  deverá respeitar as dependências existentes entre as variáveis aleatórias componentes do vetor, o que acaba por também considerar a dependência entre as diferentes classes de negócio. Tal processo de simulação, que dependerá ainda dos modelos estocásticos a serem ajustados às séries de valores observados de tais variáveis relativos a períodos anteriores à data base de avaliação, será descrito de forma detalhada mais à frente.

#### **Distribuição para $RS$ e determinação da necessidade de capital**

Da mesma forma que realizado para a PERDA, aqui obtemos uma distribuição não paramétrica para a variável  $RS$  com base nos  $S$  valores simulados. Para tanto, os valores são ordenados, e aquele cujo número de valores superiores representam  $\alpha\%$  dos  $S$  valores simulados é considerado o  $VaR_\alpha$  amostral. Por sua vez, o  $TVaR_\alpha$  amostral é determinado como a média dos valores superiores ao  $VaR_\alpha$  amostral.

A necessidade de capital é determinada, então, como o  $TVaR_\alpha$  amostral da distribuição não paramétrica obtida para o  $RS$ .



## Séries de dados

De forma a permitir a simulação de observações das variáveis aleatórias que compõem a formulação do RS, serão ajustados modelos estocásticos a tais variáveis. E para que possamos estimar os parâmetros de tais modelos, faremos uso de séries de valores observados nos períodos anteriores à data base.

Assim, temos as séries de valores observados  $da_i$  e  $eordop_i$ , onde  $i = 1, \dots, P$  representa o período anterior à data base ao qual a informação diz respeito. Da mesma forma, mas agora para cada classe de negócio  $c = 1, \dots, C$ , temos as séries de valores observados  $pg_{i,c}$ . Ajustando modelos estocásticos a tais séries, podemos então inferir sobre os respectivos valores futuros, referentes aos períodos  $k = P+1, \dots, P+K$  que compõem o horizonte de tempo de um ano considerado. Tais valores são representados pelas variáveis  $DA_k$ ,  $ORDOP_k$  e  $PG_{k,c}$ .

Em relação à variável SO, considerando as colocações realizadas acerca dos triângulos relativos aos montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos, podemos considerar, para cada classe de negócio  $c = 1, \dots, C$ , o valor  $\hat{SO}_{c,i}$ , onde  $i = 1, \dots, P$  representa o período anterior à data base ao qual a informação diz respeito, como dado pela soma dos valores que formam a linha  $i$  da seguinte tabela, considerada no modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro:

**Tabela 5** – Montantes de pagamentos referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$m_{c,1,1}$	$m_{c,1,2}$	$m_{c,1,3}$	...	$m_{c,1,P-2}$	$m_{c,1,P-1}$	$m_{c,1,P}$
2	$m_{c,2,1}$	$m_{c,2,2}$	$m_{c,2,3}$	...	$m_{c,2,P-2}$	$m_{c,2,P-1}$	$\hat{M}_{c,2,P}$
3	$m_{c,3,1}$	$m_{c,3,2}$	$m_{c,3,3}$	...	$m_{c,3,P-2}$	$\hat{M}_{c,3,P-1}$	$\hat{M}_{c,3,P}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P-2	$m_{c,P-2,1}$	$m_{c,P-2,2}$	$m_{c,P-2,3}$	...	$\hat{M}_{c,P-2,P-2}$	$\hat{M}_{c,P-2,P-1}$	$\hat{M}_{c,P-2,P}$
P-1	$m_{c,P-1,1}$	$m_{c,P-1,2}$	$\hat{M}_{c,P-1,3}$	...	$\hat{M}_{c,P-1,P-2}$	$\hat{M}_{c,P-1,P-1}$	$\hat{M}_{c,P-1,P}$
P	$m_{c,P,1}$	$\hat{M}_{c,P,2}$	$\hat{M}_{c,P,3}$	...	$\hat{M}_{c,P,P-2}$	$\hat{M}_{c,P,P-1}$	$\hat{M}_{c,P,P}$

Onde  $\hat{M}_{c,i,j}$  é a estimativa (previsão) obtida com base nos dados do triângulo de *run-off* e na modelagem estocástica definida para  $M_{c,i,j}$ .

Dessa forma,  $\hat{SO}_{c,i}$ , com  $i = 1, \dots, P$  representando um período anterior à data base, diferentemente das demais variáveis contidas na formulação de RS, é composta tanto por valores já observados como também por estimativas (previsões) de valores não observados, representando o

montante total a ser pago por sinistros cuja ocorrência se deu no período  $i$ . De forma similar às demais variáveis contidas na formulação de RS, ajustando modelo estocástico às séries  $\hat{SO}_{c,i}$ , com  $i = 1, \dots, P$ , podemos inferir sobre os valores futuros  $SO_{c,k}$ , referentes aos períodos  $k = P+1, \dots, P+K$  que compõem o horizonte de tempo de um ano considerado.

Para cada classe de negócio  $c = 1, \dots, C$ , definiremos  $\hat{NSO}_{c,i}$  de forma similar à  $\hat{SO}_{c,i}$ , com base na tabela:

**Tabela 6** – Números de pagamentos referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$n_{c,1,1}$	$n_{c,1,2}$	$n_{c,1,3}$	...	$n_{c,1,P-2}$	$n_{c,1,P-1}$	$n_{c,1,P}$
2	$n_{c,2,1}$	$n_{c,2,2}$	$n_{c,2,3}$	...	$n_{c,2,P-2}$	$n_{c,2,P-1}$	$\hat{N}_{c,2,P}$
3	$n_{c,3,1}$	$n_{c,3,2}$	$n_{c,3,3}$	...	$n_{c,1,P-2}$	$\hat{N}_{c,3,P-1}$	$\hat{N}_{c,3,P}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P-2	$n_{c,P-2,1}$	$n_{c,P-2,2}$	$n_{c,P-2,3}$	...	$\hat{N}_{c,P-2,P-2}$	$\hat{N}_{c,P-2,P-1}$	$\hat{N}_{c,P-2,P}$
P-1	$n_{c,P-1,1}$	$n_{c,P-1,2}$	$\hat{N}_{c,P-1,3}$	...	$\hat{N}_{c,P-1,P-2}$	$\hat{N}_{c,P-1,P-1}$	$\hat{N}_{c,P-1,P}$
P	$n_{c,P,1}$	$\hat{N}_{c,P,2}$	$\hat{N}_{c,P,3}$	...	$\hat{N}_{c,P,P-2}$	$\hat{N}_{c,P,P-1}$	$\hat{N}_{c,P,P}$

Ajustando modelo estocástico às séries  $\hat{NSO}_{c,i}$ , com  $i = 1, \dots, P$ , podemos inferir sobre os valores futuros  $NSO_{c,k}$ , com  $k = P+1, \dots, P+K$ .

Temos, ainda, para cada classe de negócio  $c = 1, \dots, C$ , a série de valores observados  $ne_{c,i}$ , com  $i = 1, \dots, P$ , e ajustando modelo estocástico à série de valores observados podemos inferir sobre os respectivos valores futuros  $NE_{c,k}$ , com  $k = P+1, \dots, P+K$ .

Por fim, na modelagem estocástica a ser ajustada para NE, é proposto ser considerado um fator macroeconômico, mais especificamente, a taxa Selic. Assim, temos também a série de valores observados  $selic_i$ , com  $i = 1, \dots, P$ . Já os valores futuros  $SELIC_k$ , referentes aos períodos  $k = P+1, \dots, P+K$  que compõem o horizonte de tempo de um ano considerado, ao invés de inferidos via modelos, podem ser baseados em projeções de mercado.

## Dados trimestrais

Em geral, os dados das séries em questão estão disponíveis em periodicidade mensal. Entretanto, de forma a manter o padrão adotado no modelo para determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro (necessário devido a forma de obtenção das séries  $\hat{NSO}_{c,i}$  e  $\hat{SO}_{c,i}$ ), os dados serão agrupados de forma a termos períodos trimestrais. Consequentemente, teremos  $K=4$  trimestres, formando então o horizonte de tempo de um ano adotado.



**Modelos  
estocásticos  
ajustados  
para as séries  
que compõem RS**

As modelagens estatísticas apresentadas a seguir, ajustadas para cada uma das séries de observações das variáveis que compõem RS, surgiram como fruto de várias tentativas com dados de algumas seguradoras, com o objetivo de encontrar modelos que se adequassem relativamente bem a carteiras de diferentes companhias. Foram inspiradas em algumas abordagens propostas em Kaas *et al.* (2008) e em Jong e Heller (2008).

Reforça-se que tais modelagens não são exatamente o foco principal deste trabalho. Elas poderiam, inclusive, vir a ser modificadas ou substituídas, de forma a melhor adequarem-se à realidade dos dados disponíveis, relativos a uma companhia específica. O que realmente destaca-se como ponto chave pode-se dizer que é o processo de simulação aqui proposto, respeitando dependências existentes entre as séries que compõem a formulação de RS.

**Modelo  
estocástico  
ajustado  
para  $NE_{c,i}$**

$$\ln(NE_{c,i}) \sim N\left(\ln(NE)_{\mu_{c,i}}, \ln(NE)_{\sigma_{c,i}}^2\right)$$

$$\ln(NE)_{\mu_{c,i}} = \ln(NE)_1\beta_c + \ln(NE)_2\beta_c * i + \ln(NE)_3\beta_c * SELIC_i +$$

$$\ln(NE)_4\beta_c * {}_1I_i + \ln(NE)_5\beta_c * {}_2I_i + \ln(NE)_6\beta_c * {}_3I_i$$

$${}_1I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = P, P - 4, P - 8, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_2I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = P - 1, P - 5, P - 9, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_3I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = P - 2, P - 6, P - 10, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não será definido o indicador  ${}_4I_i$  para os demais trimestres de forma a evitar problemas de identificação (multicolinearidade) na estimação dos parâmetros (ver Remark 9.3.2 de Kaas *et al.*, 2008; ver também seção 4.14 de Jong e Heller, 2008).

Na sequência, utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1970), é ajustado um modelo ARIMA( $\ln(NE)_p, \ln(NE)_i, \ln(NE)_q$ ) para os choques padronizados  $\ln(NE)\delta_{c,i}$  da modelagem linear de  $\ln(NE_{c,i})$ , capturando efeitos de autocorrelação na série de cada classe de negócio c.

**Modelo  
estocástico  
ajustado  
para NSO<sub>c,i</sub>**

$$\text{NSO}_{c,i} \sim \text{ODPoisson}(\text{NSO}\lambda_{c,i}, \text{NSO}\phi_c)$$

$$\ln(\text{NSO}\lambda_{c,i}) = \text{NSO}_1\beta_c + \text{NSO}_2\beta_c * i + \text{NSO}_3\beta_c * \ln(\text{NE}_{c,i})$$

Considerações acerca do uso da distribuição de Poisson com sobredispersão já foram realizadas quando tratamos da modelagem ajustada para N<sub>c,i,j</sub>.

**Modelo  
estocástico  
ajustado  
para PG<sub>c,i</sub>**

$$\text{PG}_{c,i} \sim \text{Gama}(\text{PGshape}_{c,i}, \text{PGrate}_{c,i})$$

$$\left(\frac{\text{PGshape}_{c,i}}{\text{PGrate}_{c,i}}\right)^{-1} = \text{PG}_1\beta_c + \text{PG}_2\beta_c * i + \text{PG}_3\beta_c * \ln(\text{NE}_{c,i})$$

**Modelo  
estocástico  
ajustado  
para SO<sub>c,i</sub>**

$$\text{SO}_{c,i} \sim \text{Gama}(\text{SOshape}_{c,i}, \text{SOrate}_{c,i})$$

$$\left(\frac{\text{SOshape}_{c,i}}{\text{SOrate}_{c,i}}\right)^{-1} = \text{SO}_1\beta_c + \text{SO}_2\beta_c * i + \text{SO}_3\beta_c * \text{NSO}_{c,i} + \text{SO}_4\beta_c * \text{PG}_{c,i}$$

**Modelo  
estocástico  
ajustado  
para DA<sub>i</sub>**

$$\text{DA}_i \sim N(\text{DA}\mu_i, \text{DA}\sigma_i^2)$$

$$\text{DA}\mu_i = \text{DA}_1\beta + \text{DA}_2\beta * \left(\sum_{c=1}^C \text{PG}_{c,i}\right) + \text{DA}_3\beta * \left(\sum_{c=1}^C \text{SO}_{c,i}\right)$$

Ainda, utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1970), é ajustado um modelo ARIMA<sup>(DA<sub>p</sub>, DA<sub>i</sub>, DA<sub>q</sub>)</sup> para os choques padronizados <sup>DA</sup>δ<sub>i</sub> da modelagem linear de DA<sub>i</sub>, capturando efeitos de autocorrelação na série.

**Modelo  
estocástico  
ajustado  
para ORDOP<sub>i</sub>**

$$\text{ORDOP}_i \sim N(\text{ORDOP}\mu_i, \text{ORDOP}\sigma_i^2)$$

$$\text{ORDOP}\mu_i = \text{ORDOP}_1\beta + \text{ORDOP}_2\beta * \left(\sum_{c=1}^C \text{PG}_{c,i}\right) + \text{ORDOP}_3\beta * \left(\sum_{c=1}^C \text{SO}_{c,i}\right)$$

Utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1970), é ainda ajustado um modelo ARIMA<sup>(ORDOP<sub>p</sub>, ORDOP<sub>i</sub>, ORDOP<sub>q</sub>)</sup> para os choques padronizados <sup>ORDOP</sup>δ<sub>i</sub> da modelagem linear de <sup>ORDOP</sup>i, capturando efeitos de autocorrelação na série.



## Processo de simulação

Simular S caminhos futuros das séries dadas pelas variáveis aleatórias  $NSO_{c,k}$ ,  $PG_{c,k}$ ,  $SO_{c,k}$ ,  $NE_{c,k}$ ,  $DA_k$  e  $ORDOP_k$ , dados os modelos propostos para cada série, equivale a simular S observações para cada uma das variáveis aleatórias  $NSO_{c,k}$ ,  $PG_{c,k}$ ,  $SO_{c,k}$ ,  $NE_{c,k}$ ,  $DA_k$  e  $ORDOP_k$ , tendo em vista as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 NE_{c,k} &= \ln \left( \ln^{(NE)}_1 \beta_c + \ln^{(NE)}_2 \beta_c * k + \ln^{(NE)}_3 \beta_c * SELIC_k + \right. \\
 &\quad \left. \ln^{(NE)}_4 \beta_c * I_k + \ln^{(NE)}_5 \beta_c * I_k + \ln^{(NE)}_6 \beta_c * I_k + \ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c * \ln^{(NE)}_{\delta} \delta_{c,k} \right) \\
 \ln^{(NE)}_{\delta} \delta_{c,k} &= \ln^{(NE)}_{h_c} \left( \left\{ \ln^{(NE)}_{\delta} \delta_{c,m} \right\}_{m=1}^{m=k-1}, \left\{ \ln^{(NE)}_{\epsilon} \epsilon_{c,m} \right\}_{m=1}^{m=k-1} \right) \\
 \ln^{(NE)}_{\epsilon} \epsilon_{c,k} &= F_{c,k}^{-1} \left( \ln^{(NE)}_{\epsilon} \epsilon_{c,k} | c, k \right) \\
 NSO_{c,k} &= F_{c,k}^{-1} (NSO_{c,k} | c, k, NE_{c,k}) \\
 PG_{c,k} &= F_{c,k}^{-1} (PG_{c,k} | c, k, NE_{c,k}) \\
 SO_{c,k} &= F_{c,k}^{-1} (SO_{c,k} | c, k, NSO_{c,k}, PG_{c,k}) \\
 DA_k &= DA_1 \beta + DA_3 \beta * \left( \sum_{c=1}^C PG_{c,k} \right) + DA_4 \beta * \left( \sum_{c=1}^C SO_{c,k} \right) + DA_{\delta} \sigma * DA_{\delta} \delta_k \\
 DA_{\delta} \delta_k &= DA_h \left( \left\{ DA_{\delta} \delta_m \right\}_{m=1}^{m=k-1}, \left\{ DA_{\epsilon} \epsilon_m \right\}_{m=1}^{m=k-1} \right) \\
 DA_{\epsilon} \epsilon_k &= F_k^{-1} (DA_{\epsilon} \epsilon_k | k) \\
 ORDOP_k &= ORDOP_1 \beta + ORDOP_3 \beta * \left( \sum_{c=1}^C PG_{c,k} \right) + ORDOP_4 \beta * \left( \sum_{c=1}^C SO_{c,k} \right) + \\
 &\quad ORDOP_{\delta} \sigma * ORDOP_{\delta} \delta_k \\
 ORDOP_{\delta} \delta_k &= ORDOP_h \left( \left\{ ORDOP_{\delta} \delta_m \right\}_{m=1}^{m=k-1}, \left\{ ORDOP_{\epsilon} \epsilon_m \right\}_{m=1}^{m=k-1} \right) \\
 ORDOP_{\epsilon} \epsilon_k &= F_k^{-1} (ORDOP_{\epsilon} \epsilon_k | k)
 \end{aligned}$$

Com  $c = 1, \dots, C$ ,  $k = P+1, \dots, P+K$ ,  $K=4$ .

Onde, além dos termos já anteriormente definidos, temos:

$\ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c$  Desvio padrão do choque definido pela modelagem linear estabelecida, por classe de negócio  $c$ , para a série  $\ln^{(NE)}_{\delta} \delta_{c,k}$ , de forma que  $\left( \ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c * \ln^{(NE)}_{\delta} \delta_{c,k} \right) \sim N \left( 0, \ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c^2 \right)$ , lembrando que  $\ln^{(NE)}_{\delta} \delta_{c,k}$  trata-se do choque padronizado.



$\ln(\text{NE})h_c$	É a forma funcional definida pelo modelo $\text{ARIMA}(\ln(\text{NE})p_c, \ln(\text{NE})i_c, \ln(\text{NE})q_c)$ estabelecido para os choques padronizados $\ln(\text{NE})\delta_{c,k}$ da modelagem linear de $\ln(\text{NE}_{c,k})$ , por classe de negócio $c$ .
$\ln(\text{NE})\epsilon_{c,k}$	É o choque definido pelo modelo $\text{ARIMA}(\ln(\text{NE})p_c, \ln(\text{NE})i_c, \ln(\text{NE})q_c)$ estabelecido para os choques padronizados $\ln(\text{NE})\delta_{c,k}$ da modelagem linear de $\ln(\text{NE}_{c,k})$ , por classe de negócio $c$ .
$\ln(\text{NE})^\epsilon F_{c,k}$	É a função de distribuição acumulada de $\ln(\text{NE})\epsilon_{c,k}$ , condicional a $c$ e $k$ ; dado o modelo $\text{ARIMA}(\ln(\text{NE})p_c, \ln(\text{NE})i_c, \ln(\text{NE})q_c)$ , temos que $\ln(\text{NE})^\epsilon F_{c,k}$ é tal que $\ln(\text{NE})\epsilon_{c,k} \sim N\left(0, \ln(\text{NE})^\epsilon \sigma_c^2\right)$ .
$\ln(\text{NE})^\epsilon V_{c,k}$	Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
$\text{NSO}F_{c,k}$	É a função de distribuição acumulada de $\text{NSO}_{c,k}$ , condicional a $c$ , $k$ e $\text{NE}_{c,k}$ , estimada através do ajuste do modelo proposto para a série relativa à classe de negócio $c$ .
$\text{NSO}U_{c,k}$	Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
$\text{PG}F_{c,k}$	É a função de distribuição acumulada de $\text{PG}_{c,k}$ , condicional a $c$ , $k$ e $\text{NE}_{c,k}$ , estimada através do ajuste do modelo proposto para a série relativa à classe de negócio $c$ .
$\text{PG}U_{c,k}$	Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
$\text{SO}F_{c,k}$	É a função de distribuição acumulada de $\text{PG}_{c,k}$ , condicional a $c$ , $k$ , $\text{NSO}_{c,k}$ e $\text{PG}_{c,k}$ , estimada através do ajuste do modelo proposto para a série relativa à classe de negócio $c$ .
$\text{SO}U_{c,k}$	Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
$\text{DA}_\delta \sigma$	Desvio padrão do choque definido pela modelagem linear estabelecida para a série $\text{DA}_k$ , de forma que $(\text{DA}_\delta \sigma * \text{DA}_\delta \delta_k) \sim N(0, \text{DA}_\delta \sigma^2)$ , lembrando que $\text{DA}_\delta \delta_k$ trata-se do choque padronizado.
$\text{DA}h$	É a forma funcional definida pelo modelo $\text{ARIMA}(\text{DA}p, \text{DA}i, \text{DA}q)$ estabelecido para os choques padronizados $\text{DA}_\delta \delta_k$ da modelagem linear de $\text{DA}_k$ .
$\text{DA}\epsilon_k$	É o choque definido pelo modelo $\text{ARIMA}(\text{DA}p, \text{DA}i, \text{DA}q)$ estabelecido para os choques padronizados $\text{DA}_\delta \delta_k$ da modelagem linear de $\text{DA}_k$ .

${}^{DA}_{\epsilon}F_k$  É a função de distribuição acumulada de  ${}^{DA}_{\epsilon_k}$ , condicional a  $k$ ; dado o modelo  $ARIMA({}^{DA}p, {}^{DA}i, {}^{DA}q)$ , temos que  ${}^{DA}_{\epsilon}F_k$  é tal que  ${}^{DA}_{\epsilon_k} \sim N\left(0, {}^{DA}_{\epsilon}\sigma^2\right)$ .

${}^{DA}_{\epsilon}V_k$  Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

${}^{ORDOP}_{\delta}\sigma$  Desvio padrão do choque definido pela modelagem linear estabelecida para a série  ${}^{ORDOP}_k$ , de forma que  $({}^{ORDOP}_{\delta}\sigma * {}^{ORDOP}_{\delta_k}) \sim N(0, {}^{ORDOP}_{\delta}\sigma^2)$ , lembrando que  ${}^{ORDOP}_{\delta_k}$  trata-se do choque padronizado.

${}^{ORDOP}_h$  É a forma funcional definida pelo modelo  $ARIMA({}^{ORDOP}p, {}^{ORDOP}i, {}^{ORDOP}q)$  estabelecido para os choques padronizados  ${}^{ORDOP}_{\delta_k}$  da modelagem linear de  ${}^{ORDOP}_k$ .

${}^{ORDOP}_{\epsilon_k}$  É o choque definido pelo modelo  $ARIMA({}^{ORDOP}p, {}^{ORDOP}i, {}^{ORDOP}q)$  estabelecido para os choques padronizados  ${}^{ORDOP}_{\delta_k}$  da modelagem linear de  ${}^{ORDOP}_k$ .

${}^{ORDOP}_{\epsilon}F_k$  É a função de distribuição acumulada de  ${}^{ORDOP}_{\epsilon_k}$ , condicional a  $k$ ; dado o modelo  $ARIMA({}^{ORDOP}p, {}^{ORDOP}i, {}^{ORDOP}q)$ , temos que  ${}^{ORDOP}_{\epsilon}F_k$  é tal que  ${}^{ORDOP}_{\epsilon_k} \sim N\left(0, {}^{ORDOP}_{\epsilon}\sigma^2\right)$ .

${}^{ORDOP}_{\epsilon}V_k$  Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

Como já dito, a nossa meta passa a ser simular  $S$  observações de cada uma das variáveis aleatórias  $^{NSO}U_{c,k}$ ,  $^{PG}U_{c,k}$ ,  $^{SO}U_{c,k}$  e  $^{ln(NE)}V_{c,k}$ , com  $c = 1, \dots, C$ ,  $k = P+1, \dots, P+K$ , como também as variáveis  $^{DA}V_k$  e  $^{ORDOP}V_k$ , com  $k = P+1, \dots, P+K$ . Ainda, a estrutura de dependência entre as variáveis deve ser respeitada.

A ideia que se apresenta, então, é a de considerar que as séries já estariam explicadas pelos modelos ajustados. Assim, faltaria levar em consideração a relação existente entre as séries. Para aplicarmos tal ideia, faremos o uso de cópulas condicionais.

Dessa forma, para  $k = P+1, \dots, P+K$ ,  $K=4$ , podemos considerar a existência das FDAs multivariadas  $F_k$  e das cópulas condicionais  $C_k$ , tais que:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{F}_{p+1}(\text{NSO}_{1,p+1}, \dots, \text{NSO}_{C,p+1}, \text{PG}_{1,p+1}, \dots, \text{PG}_{C,p+1}, \text{SO}_{1,p+1}, \dots, \text{SO}_{C,p+1}, \overset{\ln(\text{NE})}{\epsilon}_{1,p+1}, \dots, \overset{\ln(\text{NE})}{\epsilon}_{C,p+1}, \text{DA}_{\epsilon_{p+1}}, \overset{\text{ORDOP}}{\epsilon}_{p+1}) = & \overset{\text{P}}{\boxed{\text{P}}} \\
\mathbb{C}_{p+1}(\overset{\text{NSO}}{\text{U}}_{1,p+1}, \dots, \overset{\text{NSO}}{\text{U}}_{C,p+1}, \overset{\text{PG}}{\text{U}}_{1,p+1}, \dots, \overset{\text{PG}}{\text{U}}_{C,p+1}, \overset{\text{SO}}{\text{U}}_{1,p+1}, \dots, \overset{\text{SO}}{\text{U}}_{C,p+1}, \overset{\ln(\text{NE})}{V}_{1,p+1}, \dots, \overset{\ln(\text{NE})}{V}_{C,p+1}, \text{DA}_{\overset{\epsilon}{V}_{p+1}}, \overset{\text{ORDOP}}{\overset{\epsilon}{V}_{p+1}}) = & \overset{\text{P}}{\boxed{\text{P}}} \\
\vdots & \vdots \\
\mathbb{F}_{p+4}(\text{NSO}_{1,p+4}, \dots, \text{NSO}_{C,p+4}, \text{PG}_{1,p+4}, \dots, \text{PG}_{C,p+4}, \text{SO}_{1,p+4}, \dots, \text{SO}_{C,p+4}, \overset{\ln(\text{NE})}{\epsilon}_{1,p+4}, \dots, \overset{\ln(\text{NE})}{\epsilon}_{C,p+4}, \text{DA}_{\epsilon_{p+4}}, \overset{\text{ORDOP}}{\epsilon}_{p+4}) = & \overset{\text{P}}{\boxed{\text{P}}} \\
\mathbb{C}_{p+4}(\overset{\text{NSO}}{\text{U}}_{1,p+4}, \dots, \overset{\text{NSO}}{\text{U}}_{C,p+4}, \overset{\text{PG}}{\text{U}}_{1,p+4}, \dots, \overset{\text{PG}}{\text{U}}_{C,p+4}, \overset{\text{SO}}{\text{U}}_{1,p+4}, \dots, \overset{\text{SO}}{\text{U}}_{C,p+4}, \overset{\ln(\text{NE})}{V}_{1,p+4}, \dots, \overset{\ln(\text{NE})}{V}_{C,p+4}, \text{DA}_{\overset{\epsilon}{V}_{p+4}}, \overset{\text{ORDOP}}{\overset{\epsilon}{V}_{p+4}}) = & \overset{\text{P}}{\boxed{\text{P}}}
\end{array}$$

Da forma como foram estabelecidos os modelos, o conjunto condicionante é aqui determinado por  $k$ . Ainda, serão adotadas as premissas:

- 1) Podemos admitir estruturas de dependência Gaussianas, ou seja, as funções  $\mathbb{C}_k$  são cópulas Gaussianas condicionais com parâmetros  $\boldsymbol{\rho}_k$ ;
- 2) Podemos considerar o caso degenerado, ou seja,  $\mathbb{C}_k = \mathbb{C}$  e, consequentemente,  $\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}$ .

Adotadas tais premissas, podemos simular 4S observações da cópula dada pelo vetor aleatório:

$$\left( NSO_{U_1}, \dots, NSO_{U_C}, PG_{U_1}, \dots, PG_{U_C}, SO_{U_1}, \dots, SO_{U_C}, \ln(NE)_{V_1}, \dots, \ln(NE)_{V_C}, DA_{V_1}, \dots, DA_{V_C}, ORDOP_{V_1}, \dots, ORDOP_{V_C} \right)',$$

com distribuição dada por  $\mathbb{C}$ , permitindo-nos com isso simular  $S$  caminhos futuros de 4 elementos para as séries  $NSO_{1,k}, \dots, NSO_{C,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{C,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{C,k}, NE_{1,k}, \dots, NE_{C,k}, DA_k$  e  $ORDOP_k$ .

O processo descrito no parágrafo anterior pode ser realizado seguindo-se os seguintes passos:

- 1) Definimos a matriz **A**, onde cada linha é composta pelo valor em  $i=1, \dots, P$  do vetor:

$$\left( NSO_{F_{1,i}}(\widehat{NSO}_{1,i}), \dots, NSO_{F_{C,i}}(\widehat{NSO}_{C,i}), PG_{F_{1,i}}(\widehat{PG}_{1,i}), \dots, PG_{F_{C,i}}(\widehat{PG}_{C,i}), SO_{F_{1,i}}(\widehat{SO}_{1,i}), \dots, SO_{F_{C,i}}(\widehat{SO}_{C,i}), \Phi(\ln(NE)\widehat{\epsilon}_{1,i}), \dots, \Phi(\ln(NE)\widehat{\epsilon}_{C,i}), \Phi(DA\widehat{\epsilon}_i), \Phi(ORDOP\widehat{\epsilon}_i) \right)',$$

onde  $\ln(NE)\widehat{\epsilon}_{1,i}, \dots, \ln(NE)\widehat{\epsilon}_{C,i}, DA\widehat{\epsilon}_i, ORDOP\widehat{\epsilon}_i$  são os resíduos padronizados calculados com base no ajuste dos modelos propostos aos dados observados.

Com isso, cada série fica representada por uma coluna na matriz **A**. Ainda, cada linha da matriz **A** pode ser interpretada como uma observação da cópula dada pelo vetor aleatório:

$$\left( NSO_{U_1}, \dots, NSO_{U_C}, PG_{U_1}, \dots, PG_{U_C}, SO_{U_1}, \dots, SO_{U_C}, \ln(NE)_{V_1}, \dots, \ln(NE)_{V_C}, DA_{V_1}, \dots, DA_{V_C}, ORDOP_{V_1}, \dots, ORDOP_{V_C} \right)',$$

com distribuição dada por  $\mathbb{C}$ , onde  $\mathbb{C}$  é uma função cópula Gaussiana com parâmetro  $\boldsymbol{\rho}$ .

- 2) Definimos a matriz **B** como a matriz dada pela aplicação do inverso da FDA normal padrão,  $\Phi^{-1}$ , a cada um dos elementos da matriz **A**. Assim, cada linha da matriz **B** é composta pelo valor em  $i=1, \dots, P$  do vetor:

$$\left( \Phi^{-1}(NSO_{u_{1,i}}), \dots, \Phi^{-1}(NSO_{u_{C,i}}), \Phi^{-1}(PG_{u_{1,i}}), \dots, \Phi^{-1}(PG_{u_{C,i}}), \Phi^{-1}(SO_{u_{1,i}}), \dots, \Phi^{-1}(SO_{u_{C,i}}), \ln(NE)\widehat{\epsilon}_{1,i}, \dots, \ln(NE)\widehat{\epsilon}_{C,i}, DA\widehat{\epsilon}_i, ORDOP\widehat{\epsilon}_i \right)',$$

Onde  $NSO_{u_{1,i}}, \dots, NSO_{u_{C,i}}, PG_{u_{1,i}}, \dots, PG_{u_{C,i}}, SO_{u_{1,i}}, \dots, SO_{u_{C,i}}$  com  $i = 1, \dots, P$ , representam os primeiros 3C elementos da observação de índice  $i$  da cópula explicitada no primeiro passo.

A matriz de correlação  $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ , calculada com base nas colunas da matriz **B**, pode então ser vista como uma estimativa do parâmetro  $\boldsymbol{\rho}$ .



- 3) Geramos  $S * K$ ,  $K=4$ , observações do vetor normal padrão multivariado:

$$\left( NSO_{X_1}, \dots, NSO_{X_C}, PG_{X_1}, \dots, PG_{X_C}, SO_{X_1}, \dots, SO_{X_C}, \ln(NE)_{\epsilon_{X_1}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{X_C}}, DA_{\epsilon_X}, ORDOP_{\epsilon_X} \right)',$$

com correlação dada por  $\hat{P}$ .

- 4) Aplicando em cada amostra do vetor normal padrão multivariado a transformação:

$$\begin{aligned} & \left( NSO_{U_1}, \dots, NSO_{U_C}, PG_{U_1}, \dots, PG_{U_C}, SO_{U_1}, \dots, SO_{U_C}, \ln(NE)_{\epsilon_{V_1}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{V_C}}, DA_{\epsilon_V}, ORDOP_{\epsilon_V} \right)' = \\ & \left( \Phi(NSO_{X_1}), \dots, \Phi(NSO_{X_C}), \Phi(PG_{X_1}), \dots, \Phi(PG_{X_C}), \Phi(SO_{X_1}), \dots, \Phi(SO_{X_C}), \right. \\ & \left. \Phi\left(\ln(NE)_{\epsilon_{X_1}}\right), \dots, \Phi\left(\ln(NE)_{\epsilon_{X_C}}\right), \Phi\left(DA_{\epsilon_X}\right), \Phi\left(ORDOP_{\epsilon_X}\right) \right)', \end{aligned}$$

temos então as  $S * K$ ,  $K=4$ , observações da cópula Gaussiana.

- 5) Agrupando as observações geradas no passo anterior em  $K=4$  grupos de  $S$ , conseguimos gerar  $S$  observações de cada uma das linhas da matriz **C**, onde cada linha é composta pelo valor em  $k=P+1, \dots, P+K$ ,  $K=4$ , do vetor:

$$\left( NSO_{1,k}, \dots, NSO_{C,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{C,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{C,k}, \ln(NE)_{\epsilon_{1,k}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{C,k}}, DA_{\epsilon_k}, ORDOP_{\epsilon_k} \right)'$$

- 6) Por fim, da matriz **C** definimos a matriz **D**, onde cada linha é composta pelo valor em  $k=P+1, \dots, P+K$ ,  $K=4$ , do vetor:

$$\left( NSO_{1,k}, \dots, NSO_{C,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{C,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{C,k}, NE_{1,k}, \dots, NE_{C,k}, DA_k, ORDOP_k \right)'$$

As primeiras 3C colunas, relativas às variáveis NSO, PG e SO, são idênticas às respectivas da matriz **C**. Já as  $C+2$  últimas colunas têm seus elementos determinados de forma iterativa, considerando as relações acerca das variáveis NE, DA e ORDOP, descritas no início desta seção tratando do processo de simulação.

Realizando o procedimento acima para cada uma das  $S$  observações geradas para a matriz **C** no quinto passo, conseguimos obter  $S$  simulações da matriz **D**. Por fim, como cada coluna da matriz **D** representa as previsões para os  $K=4$  períodos futuros das séries que utilizaremos para determinação da distribuição não paramétrica de RS, alcançamos então nosso objetivo.



#### 4. Execução do modelo proposto e apresentação dos resultados

De forma a exemplificar o uso do modelo proposto para determinação de necessidade de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, aplicaremos aos dados de uma sociedade seguradora as duas componentes do modelo (Módulos 1 e 2). A data base de avaliação foi tomada como sendo 28/09/2012 (último dia útil do mês). Os dados foram organizados em trimestres e foram tomados  $P=13$  trimestres de observações.

Foram utilizadas neste exercício de execução do modelo proposto as três classes de negócio relevantes da companhia, a saber:

- $c=1$ : Patrimonial Demais;
- $c=2$ : Automóveis;
- $c=3$ : Residencial

As classes de negócio 1, 2 e 3 acima são equivalentes, respectivamente, às classes de negócio 4, 8 e 1 estabelecidas na Tabela 4 do Anexo III da Resolução CNSP 280, de 30 de janeiro de 2013 (capital de risco de subscrição).

Para determinação das distribuições não paramétricas da PERDA e de RS, serão executadas  $S=1.000$  simulações (respectivamente, de pares de triângulos inferiores e de projeções de séries), seguindo os passos dos processos de simulação descritos. Todo o processo (ajustes de modelos aos dados e simulações) será conduzido através da execução de scripts no pacote estatístico S-PLUS.

#### Execução do modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro

Nas tabelas a seguir são apresentados os triângulos de *run-off* de montantes e números de pagamentos de sinistros, relativos aos  $P=13$  trimestres observados, de cada uma das  $C=3$  classes de negócio consideradas. Os valores dos triângulos de *run-off* de montantes de sinistros estão convertidos em unidades de IPCA.

**Tabela 7 – Triângulo de *run-off* – números de pagamentos ( $n_{c,i,j}$ ) – Patrimonial Demais ( $c=1$ )**

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	172	210	51	21	0	3	0	2	0	0	0	2	1
2	191	241	32	10	9	3	2	0	1	2	3	1	
3	173	149	30	15	4	0	1	1	0	0	0		
4	151	117	28	10	2	2	1	1	1	2			
5	142	203	31	11	8	6	7	3	4				
6	172	152	19	16	7	5	6	4					
7	191	146	46	27	11	6	1						
8	162	139	28	7	5	1							
9	90	158	30	11	5								
10	98	120	19	15									
11	91	121	13										
12	101	103											
13	106												



**Tabela 8** – Triângulo de *run-off* – montantes de pagamentos ( $m_{c,i,j}$ ) – Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	223,29	558,26	269,77	57,17	0,00	2,63	0,00	5,73	0,00	0,00	0,00	26,88	8,45
2	312,83	715,18	68,03	30,17	128,87	1,04	2,52	0,00	2,08	56,67	3,24	6,13	
3	364,63	317,30	56,29	36,20	11,51	0,00	8,84	0,13	0,00	0,00	0,00		
4	217,83	213,28	151,92	9,11	3,55	10,11	0,18	0,29	2,34	22,83			
5	422,02	587,30	58,72	45,68	24,49	18,23	6,27	12,39	3,27				
6	194,96	730,32	146,55	108,49	27,85	4,68	1,58	3,80					
7	223,97	645,72	154,91	86,50	14,72	8,12	5,70						
8	211,43	348,03	48,74	22,41	15,56	1,20							
9	183,64	415,85	55,95	18,12	13,24								
10	141,09	361,35	66,92	56,06									
11	275,32	666,89	55,27										
12	360,53	461,66											
13	349,34												

**Tabela 9** – Triângulo de *run-off* – números de pagamentos ( $n_{c,i,j}$ ) – Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10581	11986	940	183	84	48	58	55	29	32	24	26	14
2	11288	10873	472	154	88	59	35	30	32	39	50	23	
3	10676	9474	688	187	103	66	61	29	66	66	30		
4	10385	11133	886	227	151	88	80	42	74	35			
5	10029	12049	807	264	124	92	67	75	92				
6	10575	11240	904	236	134	115	53	323					
7	10162	18751	1146	272	195	129	140						
8	19064	15721	1212	459	184	70							
9	15122	15275	1620	314	131								
10	15886	15214	1071	248									
11	15659	13367	1046										
12	14162	15276											
13	13857												

**Tabela 10** – Triângulo de *run-off* – montantes de pagamentos ( $m_{c,i,j}$ ) – Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10402,54	7748,00	636,19	122,59	37,18	27,93	64,62	36,20	27,55	28,43	13,22	10,97	18,78
2	11204,41	6909,42	325,25	109,14	71,77	49,48	17,52	30,43	6,46	31,43	53,89	11,01	
3	11296,52	6858,92	496,29	84,74	98,27	35,86	44,67	18,02	35,40	39,70	17,21		
4	11482,30	7289,89	653,82	164,20	114,22	37,99	23,07	21,73	33,13	14,48			
5	11945,90	8536,29	591,76	217,90	84,56	26,15	60,45	51,73	29,08				
6	12050,76	8276,98	451,77	142,70	95,53	54,58	23,57	31,15					
7	11600,71	8095,10	661,73	138,33	81,22	58,33	55,37						
8	11062,21	7770,12	601,37	185,90	86,50	29,58							
9	9456,44	7688,45	490,53	192,67	67,95								
10	10031,97	7140,46	483,65	113,34									
11	9667,51	6346,95	495,17										
12	8709,07	6580,10											
13	9435,80												



**Tabela 11** – Triângulo de *run-off* – números de pagamentos ( $n_{c,i,j}$ ) – Residencial ( $c=3$ )

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1028	583	45	5	7	3	0	1	1	2	2	0	0
2	884	465	39	16	7	6	1	0	1	3	0	0	
3	856	553	46	11	8	5	0	4	2	0	1		
4	1290	587	75	10	13	1	1	3	1	0			
5	1479	903	99	19	9	12	7	2	2				
6	703	498	39	10	7	4	0	0					
7	969	651	31	7	5	9	2						
8	1200	782	68	16	11	8							
9	1557	929	77	22	16								
10	941	323	32	11									
11	947	582	62										
12	1492	823											
13	1433												

**Tabela 12** – Triângulo de *run-off* – montantes de pagamentos ( $m_{c,i,j}$ ) – Residencial ( $c=3$ )

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	668,16	294,37	23,46	1,67	29,79	17,41	0,00	0,33	0,02	4,47	0,32	0,00	0,00
2	537,92	325,07	23,38	2,92	0,77	6,28	1,56	0,00	0,04	6,88	0,00	0,00	
3	488,45	392,53	29,30	1,68	47,27	0,87	0,00	1,74	0,41	0,00	0,34		
4	548,37	323,46	81,25	3,44	0,93	0,15	0,12	5,91	1,10	0,00			
5	743,63	527,00	61,44	5,44	4,74	4,33	25,08	6,77	0,25				
6	471,27	362,54	19,63	5,65	5,57	5,42	0,00	0,00					
7	459,19	354,85	51,46	0,70	0,25	5,57	5,10						
8	512,12	510,51	48,21	19,66	18,01	7,72							
9	626,62	454,76	84,49	8,23	19,38								
10	448,58	197,86	15,31	0,86									
11	430,20	405,20	55,48										
12	665,02	377,15											
13	564,23												

Os valores estimados para os parâmetros das modelagens estocásticas propostas para  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$  estão listados a seguir.

**Tabela 13** – Parâmetros estimados – modelos para  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$  – Patrimonial Demais ( $c=1$ )

$\ln(M)_{0\beta_c}$	$i$ ou $j$	$\ln(M)_{1\beta_{c,i}}$	$\ln(M)_{2\beta_{c,j}}$	$\ln(M)_{3\beta_c}$	$\ln(M)_{\sigma_c^2}$	$N_{0\beta_c}$	$i$ ou $j$	$N_{1\beta_{c,i}}$	$N_{2\beta_{c,j}}$	$N_{\phi_c}$
0,0925	1	0,0000	0,0000	1,0860	0,6525	5,2277	1	0,0000	0,0000	2,4916
	2	0,1030	0,5578				2	0,0712	0,0696	
	3	-0,1325	0,7467				3	-0,2087	-1,6098	
	4	-0,2553	0,7637				4	-0,3754	-2,3744	
	5	0,1203	0,9162				5	-0,0973	-3,3336	
	6	-0,0269	0,1726				6	-0,1798	-3,9177	
	7	0,0868	0,0941				7	-0,0589	-4,1711	
	8	-0,1574	-0,1430				8	-0,2769	-4,5003	
	9	-0,2259	0,4306				9	-0,4199	-4,9351	
	10	0,0785	1,6908				10	-0,5591	-5,1141	
	11	0,5528	0,3079				11	-0,6323	-5,1881	
	12	0,6172	2,0323				12	-0,6381	-4,8584	
	13	0,6991	2,0417				13	-0,5642	-5,2277	



**Tabela 14** – Parâmetros estimados – modelos para  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$  – Automóveis ( $c=2$ )

$\ln(M)_0\beta_c$	i ou j	$\ln(M)_1\beta_{c,i}$	$\ln(M)_2\beta_{c,j}$	$\ln(M)_3\beta_c$	$\ln(M)\sigma_c^2$	$N_0\beta_c$	i ou j	$N_1\beta_{c,i}$	$N_2\beta_{c,j}$	$N\phi_c$
4,4388	1	0,0000	0,0000	0,5292	0,0964	9,3037	1	0,0000	0,0000	72,3615
	2	-0,0476	-0,3929				2	-0,0383	0,0431	
	3	-0,0203	-1,6646				3	-0,1134	-2,5570	
	4	-0,1011	-2,2786				4	-0,0375	-3,8947	
	5	0,0739	-2,5472				5	-0,0143	-4,5221	
	6	-0,1721	-3,0353				6	-0,0126	-4,9567	
	7	-0,0952	-2,9901				7	0,2584	-5,0594	
	8	-0,2188	-3,1716				8	0,4370	-4,7430	
	9	-0,2519	-3,3969				9	0,3173	-5,1931	
	10	-0,3116	-3,0772				10	0,3210	-5,4961	
	11	-0,3138	-3,1287				11	0,2554	-5,7085	
	12	-0,3891	-3,7099				12	0,2714	-6,0861	
	13	-0,3336	-2,9029				13	0,2328	-6,6647	

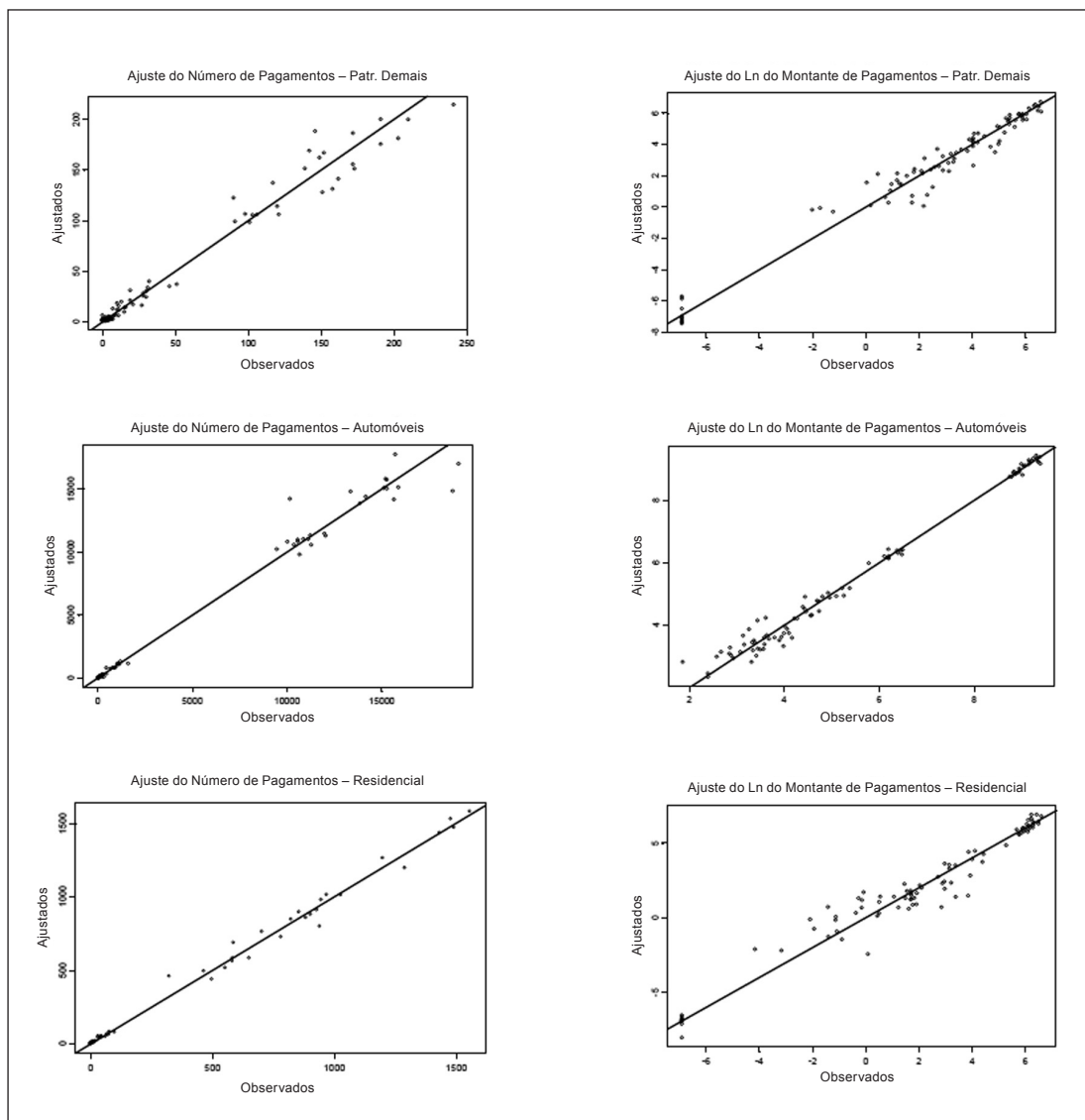
**Tabela 15** – Parâmetros estimados – modelos para  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$  – Residencial ( $c=3$ )

$\ln(M)_0\beta_c$	i ou j	$\ln(M)_1\beta_{c,i}$	$\ln(M)_2\beta_{c,j}$	$\ln(M)_3\beta_c$	$\ln(M)\sigma_c^2$	$N_0\beta_c$	i ou j	$N_1\beta_{c,i}$	$N_2\beta_{c,j}$	$N\phi_c$
-0,8205	1	0,0000	0,0000	1,0236	0,9447	6,9184	1	0,0000	0,0000	3,2095
	2	-0,0863	0,1851				2	-0,1649	-0,5527	
	3	-0,0535	0,4443				3	-0,1209	-2,9640	
	4	-0,3212	-0,5341				4	0,1672	-4,4522	
	5	0,1311	0,2113				5	0,4134	-4,8016	
	6	0,2347	0,3919				6	-0,2829	-5,1792	
	7	-0,3197	1,0232				7	0,0014	-6,4920	
	8	0,4452	0,8704				8	0,2218	-6,4372	
	9	0,1794	-1,2971				9	0,4464	-6,6641	
	10	-0,4407	1,4152				10	-0,2368	-6,6737	
	11	0,0535	-0,0479				11	-0,0330	-6,8252	
	12	-0,2316	1,0267				12	0,3743	-13,7471	
	13	-0,2830	0,9835				13	0,3491	-13,8262	

As figuras a seguir mostram o cruzamento dos valores  $\ln(m_{c,i,j})$  e  $n_{c,i,j}$  observados, componentes dos triângulos de *run-off*, e seus respectivos valores ajustados pelos modelos estocásticos propostos para  $\ln(M_{c,i,j})$  e  $N_{c,i,j}$ , permitindo a avaliação dos ajustes dos modelos aos dados.



**Figura 2** – Cruzamentos entre valores observados e ajustados para números e montantes de pagamentos





Observar que, em especial nos gráficos relativos ao ajuste de  $\ln(M_{c,i,j})$ , há uma concentração de pontos onde o valor observado é igual a -6,9077. Isto se dá pois, para fins de facilitar a estimação dos parâmetros via funções do pacote estatístico S-Plus, foi adotado o procedimento prático de substituir os valores iguais a zero nos triângulos de *run-off* por 0,001; e assim, ao aplicar o logaritmo neperiano a tais valores, temos  $\ln(0,001) = -6,9077$ .

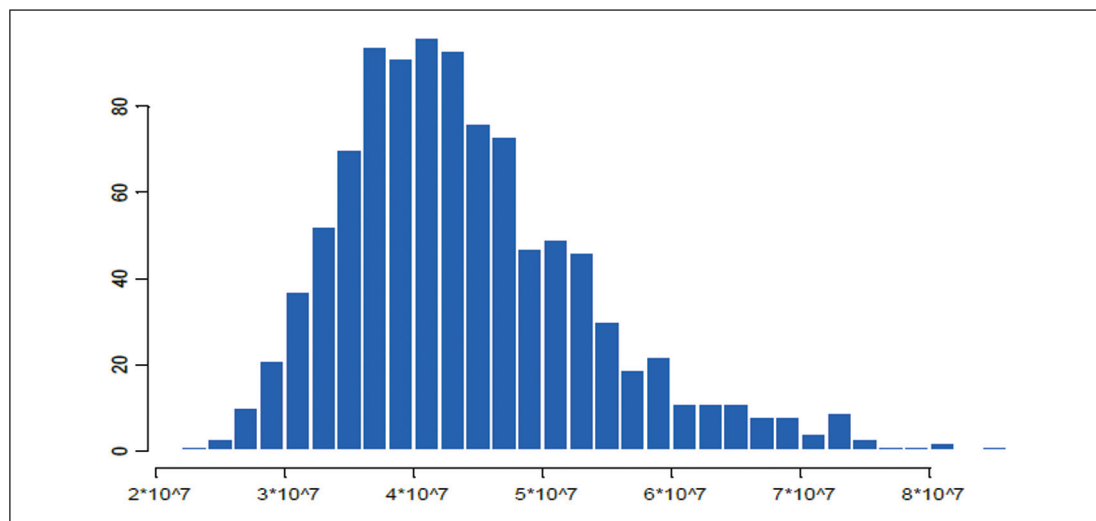
Estimados os parâmetros das distribuições propostas pelos modelos para  $M_{c,i,j}$  e  $N_{c,i,j}$ , pôde ser estimada, com base no passo 2 do processo de simulação, a matriz  $\rho$ .

$$\rho = \begin{bmatrix} 1,00 & -0,17 & 0,11 & 0,09 & 0,03 & -0,02 \\ -0,17 & 1,00 & 0,05 & -0,01 & -0,02 & -0,08 \\ 0,11 & 0,05 & 1,00 & -0,17 & 0,23 & 0,04 \\ 0,09 & -0,01 & -0,17 & 1,00 & 0,00 & 0,16 \\ 0,03 & -0,02 & 0,23 & 0,00 & 1,00 & -0,04 \\ -0,02 & -0,08 & 0,04 & 0,16 & -0,04 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Executando os demais passos do processo de simulação, chega-se aos  $S=1000$  pares de triângulos inferiores simulados, de montantes e de número de pagamentos. Ressalta-se que, embora a formulação para determinação da PERDA envolva somente os triângulos inferiores de montantes de pagamentos, a simulação dos triângulos inferiores de números de pagamentos são necessárias, pois a  $s$ -ésima simulação do triângulo inferior de montantes de pagamentos é determinada sobre a  $s$ -ésima simulação do triângulo inferior de números de pagamentos.

E, finalmente, é apresentado o histograma dos  $S=1.000$  valores simulados para a PERDA, dando uma ideia da distribuição não paramétrica desejada. Os valores simulados para a perda já estão convertidos em Reais.

**Figura 3** – Histograma dos valores simulados para a PERDA





A tabela a seguir apresenta os valores de necessidade de capital, determinados com base no excesso do  $TVaR_{\alpha}$  em relação ao valor esperado, ambos amostrais, determinados com base nos valores simulados para a PERDA.

**Tabela 16** – Valores de necessidade de capital – risco de provisão de sinistros

Nível de confiança ( $\alpha$ )	$TVaR_{\alpha}$	Valor esperado da PERDA	Necessidade de capital (risco de prov. de sinistros)
95,0%	70.018.317,61	- 44.102.480,48 =	25.915.837,13
97,5%	73.886.342,30	- 44.102.480,48 =	29.783.861,82
99,0%	77.700.650,05	- 44.102.480,48 =	33.598.169,57

**Execução do  
modelo para a  
determinação da  
necessidade  
de capital para  
fazer frente  
ao risco de  
emissão/precificação**

Na tabela a seguir são apresentadas as séries relativas aos P=13 trimestres de observações das variáveis consideradas no modelo proposto.

**Tabela 17** – Séries – Patrimonial Demais (c=1)

Trimestre (i)	$NE_{c,i}$	$NSO_{c,i}$	$SO_{c,i}$	$PG_{c,i}$
1	16.649,16	462,01	1.152,19	2.384,34
2	32.022,50	496,02	1.339,00	2.552,10
3	39.070,21	375,01	814,25	2.758,77
4	25.922,96	317,37	646,96	2.553,50
5	22.491,46	419,18	1.215,61	2.648,61
6	13.764,07	386,01	1.249,36	2.591,65
7	7.238,76	435,54	1.186,15	2.466,41
8	6.530,79	350,14	677,41	2.430,86
9	5.582,18	303,56	714,58	2.108,62
10	3.410,26	264,15	673,36	1.944,30
11	13.450,99	245,62	1.136,15	2.265,18
12	22.880,42	244,22	1.112,10	2.286,29
13	22.871,62	262,77	1.633,84	2.309,83



**Tabela 18 – Séries – Automóveis (c=2)**

Trimestre (i)	NE <sub>c,i</sub>	NSO <sub>c,i</sub>	SO <sub>c,i</sub>	PG <sub>c,i</sub>
1	592.920,35	24.060,00	19.174,20	28.549,94
2	1.427.721,58	23.157,26	18.827,89	27.423,13
3	401.927,10	21.481,46	19.038,65	27.404,60
4	806.813,40	23.176,18	19.861,01	31.207,49
5	479.667,10	23.721,87	21.597,37	27.730,92
6	253.245,40	23.755,84	21.183,47	28.527,21
7	157.492,20	31.150,37	20.804,98	27.392,00
8	89.237,83	37.254,16	19.889,60	25.673,81
9	34.434,91	33.043,06	18.062,82	30.226,57
10	44.112,71	33.166,64	17.996,63	26.750,27
11	1.227.734,86	31.077,25	16.853,38	25.340,43
12	753.730,53	31.543,14	16.071,86	25.491,87
13	542.542,22	30.404,12	17.116,22	25.668,07

**Tabela 19 – Séries – Residencial (c=3)**

Trimestre (i)	NE <sub>c,i</sub>	NSO <sub>c,i</sub>	SO <sub>c,i</sub>	PG <sub>c,i</sub>
1	69.079,16	1.677,00	1.039,99	1.502,50
2	70.954,33	1.422,01	904,83	1.570,70
3	85.163,51	1.486,01	962,61	1.650,33
4	113.680,37	1.982,28	965,35	1.885,29
5	174.244,07	2.535,61	1.386,57	1.702,45
6	387.297,73	1.263,75	873,95	1.744,52
7	491.732,75	1.679,60	882,63	1.785,68
8	447.371,67	2.093,48	1.136,73	1.806,59
9	378.659,67	2.621,04	1.224,90	1.698,67
10	174.400,62	1.323,58	674,62	1.848,95
11	149.678,62	1.622,04	918,20	1.848,36
12	155.560,24	2.437,10	1.151,34	2.150,30
13	138.369,12	2.376,89	1.274,33	1.834,78

**Tabela 20 – Séries gerais da companhia**

Trimestre (i)	DA <sub>i</sub>	ORDOP <sub>i</sub>	SELIC <sub>i</sub>
1	11.162,13	2.160,77	9,07%
2	12.836,55	5.314,02	8,66%
3	12.038,97	3.989,43	8,34%
4	12.835,23	4.203,56	9,21%
5	13.175,98	7.028,82	10,91%
6	13.022,05	6.592,53	10,69%
7	13.624,39	6.636,62	11,03%
8	12.928,55	11.239,56	11,72%
9	13.274,55	3.511,43	12,61%
10	15.482,23	4.968,46	11,13%
11	15.538,70	4.662,80	10,30%
12	14.960,56	5.009,86	8,72%
13	15.579,96	5.277,35	7,92%

Os valores acima relativos à taxa Selic foram construídos com base nos valores obtidos do *site* do IPEA, estas taxas a.m. Foram, então, compostas as taxas relativas aos meses de cada trimestre, obtendo-se então as taxas a.t., sendo depois estas convertidas para taxas a.a.

Os valores futuros  $SELIC_k$ , referentes aos períodos  $k = 14, \dots, 17$  que compõem o horizonte de tempo de um ano considerado, foram obtidos do *site* do Banco Central do Brasil, sendo estes referentes a projeções de mercado. Os valores obtidos, sendo taxas a.m., foram então compostos dentro dos trimestres, determinando as taxas a.t., sendo depois estas convertidas para taxas a.a., dispostas na tabela a seguir. Tais valores são necessários para a obtenção das simulações dos S caminhos futuros para a série  $NE_{c,k}$ ,  $c = 1, \dots, 3$  e  $k = 14, \dots, 17$ .

**Tabela 21** – Projeções da Selic

Trimestre	$SELIC_i$
14	7,39%
15	7,40%
16	7,55%
17	7,83%

A seguir, são apresentados os valores estimados para os parâmetros das modelagens estocásticas propostas para as séries.

**Tabela 22** – Parâmetros estimados – modelo para  $\ln(NE)$

Classe de negócio (c)	$\ln(NE)_1 \beta_c$	$\ln(NE)_2 \beta_c$	$\ln(NE)_3 \beta_c$	$\ln(NE)_4 \beta_c$	$\ln(NE)_5 \beta_c$	$\ln(NE)_6 \beta_c$
1	13,9618	-0,0558	-38,9897	-0,0209	-0,3193	-0,0592
2	19,2054	-0,0459	-60,6465	-0,2359	-0,3322	0,0779
3	8,3087	0,0482	35,4982	-0,2676	-0,1690	-0,0318

**Tabela 23** – Parâmetros estimados – modelo para  $\ln(NE)$  – ajuste ARIMA

Classe de negócio (c)	$\ln(NE)_\delta \sigma_c$	$\ln(NE)_p \rho_c$	$\ln(NE)_i i_c$	$\ln(NE)_q q_c$	AR(i-1)	AR(i-2)	AR(i-3)	$\ln(NE)_\epsilon \sigma_c$
1	0,3627	3	1	0	-0,5000	-0,3989	0,3190	1,0145
2	0,7425	3	0	0	-0,2216	-0,4590	-0,2916	0,8469
3	0,3578	2	0	0	0,9352	-0,7081		0,6831



**Tabela 24** – Parâmetros estimados – modelo para NSO

Classe de negócio (c)	$^{NSO}\phi_c$	$^{NSO}_1\beta_c$	$^{NSO}_2\beta_c$	$^{NSO}_3\beta_c$
1	6,4967	6,7191	-0,0582	-0,0493
2	292,9526	10,7989	0,0314	-0,0617
3	122,9317	7,1241	0,0246	0,0200

**Tabela 25** – Parâmetros estimados – modelo para PG

Classe de negócio (c)	$^{PG}_1\beta_c$	$^{PG}_2\beta_c$	$^{PG}_3\beta_c$
1	0,000671	4,10E-06	-2,9E-05
2	2,53E-05	3,99E-07	6,56E-07
3	0,000636	-9,87E-06	1,91E-08

**Tabela 26** – Parâmetros estimados – modelo para SO

Classe de negócio (c)	$^{SO}_1\beta_c$	$^{SO}_2\beta_c$	$^{SO}_3\beta_c$	$^{SO}_4\beta_c$
1	0,004096	-9,3E-05	-3,50E-06	-5,08E-07
2	6,51E-05	8,04E-07	-1,69E-10	-4,74E-10
3	0,001300	4,82E-06	-3,67E-07	2,01E-07

**Tabela 27** – Parâmetros estimados – modelo para DA

$DA_1\beta$	$DA_2\beta$	$DA_3\beta$
-30715,8	0,331897	0,315255

**Tabela 28** – Parâmetros estimados – modelo para DA – ajuste ARIMA

$DA_\sigma$	$DA_p$	$DA_i$	$DA_q$	AR(i-1)	AR(i-2)	AR(i-3)	MA(i-1)	$DA_{\epsilon_\sigma}$
1021,08	3	1	1	-0,0621	-0,2764	-0,0371	0,9836	0,6191

**Tabela 29** – Parâmetros estimados – modelo para ORDOP

$ORDOP_1\beta$	$ORDOP_2\beta$	$ORDOP_3\beta$
12064,63	-0,76067	0,829977

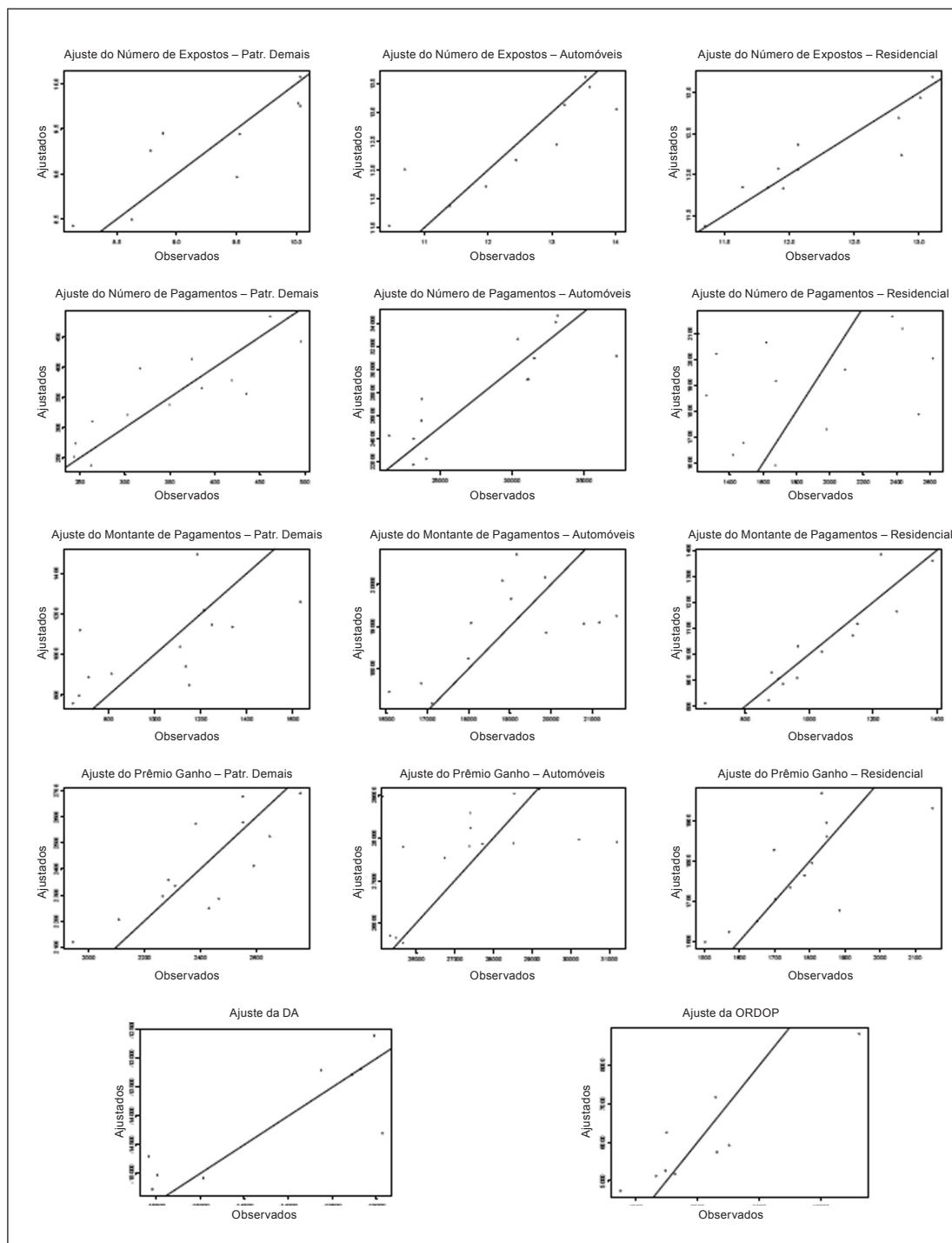
**Tabela 30** – Parâmetros estimados – modelo para ORDOP – ajuste ARIMA

$ORDOP_\sigma$	$ORDOP_p$	$ORDOP_i$	$ORDOP_q$	AR(i-1)	AR(i-2)	AR(i-3)	MA(i-1)	$ORDOP_{\epsilon_\sigma}$
1581,13	3	1	1	-0,8637	-0,5597	-0,5650	-0,9827	0,7592

As figuras a seguir mostram, para cada série à qual foi ajustada modelagem estocástica, o cruzamento dos valores observados com os respectivos valores ajustados, permitindo uma avaliação dos ajustes realizados.



**Figura 4 – Cruzamentos entre valores observados e ajustados para as séries**





Estimados os parâmetros das distribuições propostas pelos modelos ajustados às séries, estimamos a matriz  $\rho$ , com base no passo 2 do processo de simulação.

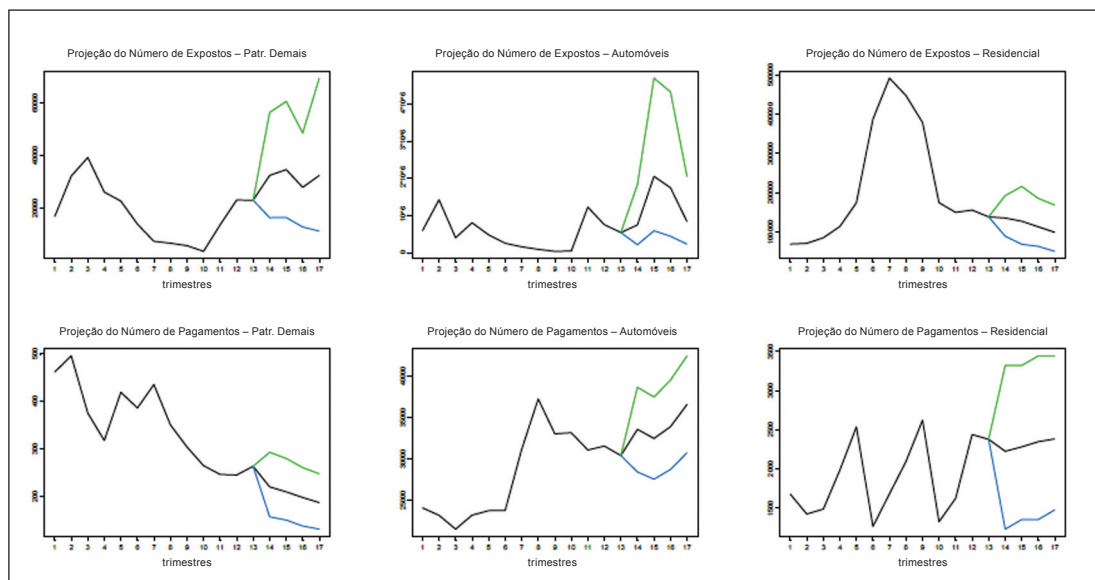
$$\rho = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,07 & 0,22 & 0,84 & -0,08 & 0,18 & -0,19 & 0,75 & 0,35 & -0,39 & 0,46 & 0,26 & 0,04 & 0,49 \\ 0,07 & 1,00 & 0,09 & 0,24 & -0,67 & 0,11 & -0,53 & -0,16 & 0,24 & -0,42 & 0,17 & -0,40 & 0,69 & 0,60 \\ 0,22 & 0,09 & 1,00 & 0,09 & 0,25 & -0,03 & -0,20 & -0,04 & 0,16 & 0,16 & 0,17 & 0,08 & 0,48 & 0,11 \\ 0,84 & 0,24 & 0,09 & 1,00 & -0,30 & 0,10 & -0,21 & 0,81 & 0,67 & -0,27 & 0,62 & 0,45 & 0,33 & 0,68 \\ -0,08 & -0,67 & 0,25 & -0,30 & 1,00 & -0,39 & 0,34 & -0,22 & -0,30 & 0,48 & -0,10 & 0,40 & -0,50 & -0,74 \\ 0,18 & 0,11 & -0,03 & 0,10 & -0,39 & 1,00 & 0,21 & -0,08 & 0,40 & -0,26 & 0,08 & 0,10 & 0,12 & -0,04 \\ -0,19 & -0,53 & -0,20 & -0,21 & 0,34 & 0,21 & 1,00 & -0,18 & 0,30 & 0,78 & 0,46 & 0,19 & -0,61 & -0,64 \\ 0,75 & -0,16 & -0,04 & 0,81 & -0,22 & -0,08 & -0,18 & 1,00 & 0,31 & -0,27 & 0,34 & 0,30 & 0,02 & 0,64 \\ 0,35 & 0,24 & 0,16 & 0,67 & -0,30 & 0,40 & 0,30 & 0,31 & 1,00 & 0,25 & 0,80 & 0,51 & 0,42 & 0,30 \\ -0,39 & -0,42 & 0,16 & -0,27 & 0,48 & -0,26 & 0,78 & -0,27 & 0,25 & 1,00 & 0,46 & 0,16 & -0,30 & -0,53 \\ 0,46 & 0,17 & 0,17 & 0,62 & -0,10 & 0,08 & 0,46 & 0,34 & 0,80 & 0,46 & 1,00 & 0,21 & 0,06 & 0,23 \\ 0,26 & -0,40 & 0,08 & 0,45 & 0,40 & 0,10 & 0,19 & 0,30 & 0,51 & 0,16 & 0,21 & 1,00 & 0,08 & -0,18 \\ 0,04 & 0,69 & 0,48 & 0,33 & -0,50 & 0,12 & -0,61 & 0,02 & 0,42 & -0,30 & 0,06 & 0,08 & 1,00 & 0,62 \\ 0,49 & 0,60 & 0,11 & 0,68 & -0,74 & -0,04 & -0,64 & 0,64 & 0,30 & -0,53 & 0,23 & -0,18 & 0,62 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Executando os demais passos do processo de simulação, chega-se aos  $S=1.000$  caminhos futuros para cada uma das séries consideradas no modelo. Ressalta-se que a simulação de índice  $(s,k)$  de uma variável poderá ser necessária na determinação da simulação de índice  $(s,k)$  de outra variável, dependendo do modelo proposto para esta segunda variável. Por exemplo, como a modelagem proposta para ajuste à série SO tem como variáveis explicativas NSO e PG, o valor simulado  $SO_{s,c,k}$  é determinado utilizando-se os valores simulados  $NSO_{s,c,k}$  e  $PG_{s,c,k}$ ; por sua vez, como o modelo ajustado à NSO tem como variável explicativa  $\ln(NE)$ , o valor  $NSO_{s,c,k}$  é determinado utilizando-se o valor simulado  $NE_{s,c,k}$  e assim por diante.

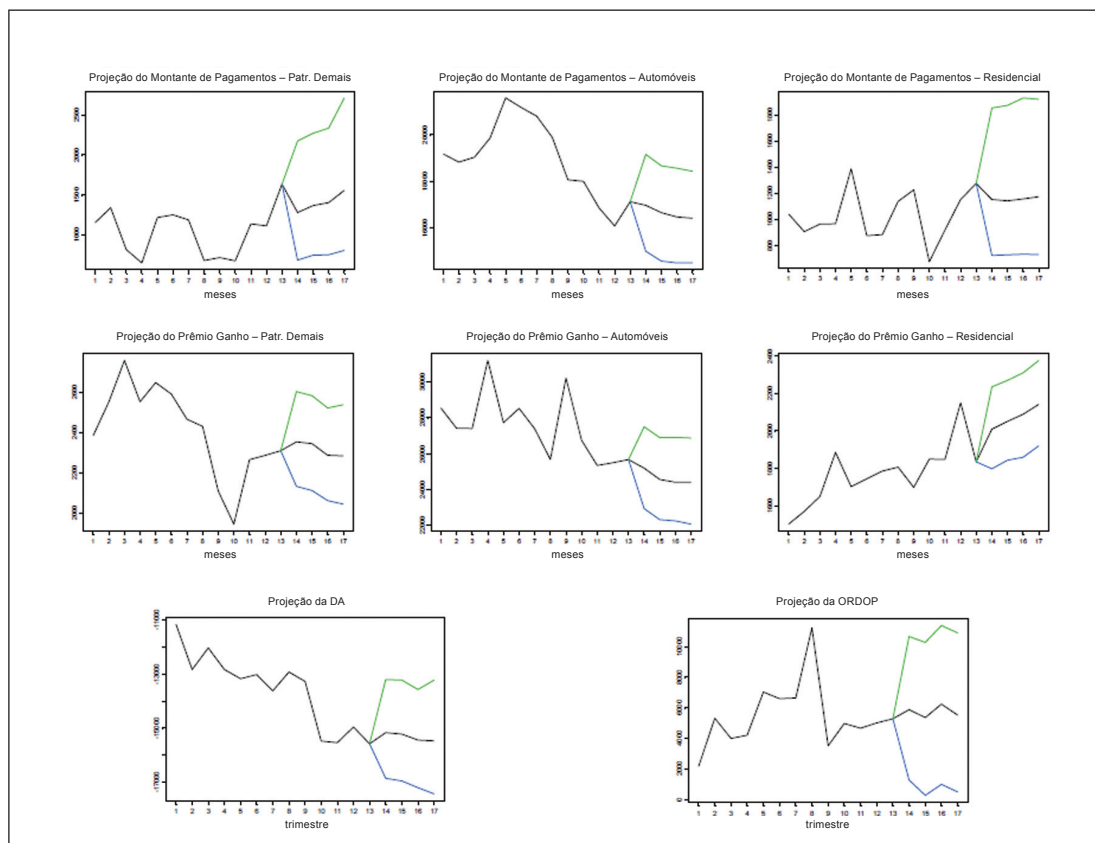
A seguir, são apresentados gráficos de cada uma das séries consideradas, completadas pelas médias dos  $S=1.000$  valores simulados para cada período futuro  $k=14, \dots, 15$ . Ainda, são apresentados intervalos de confiança de 95%, calculados de forma não paramétrica, com base nos valores simulados.



**Figura 5 – Projeções das séries (parte 1)**

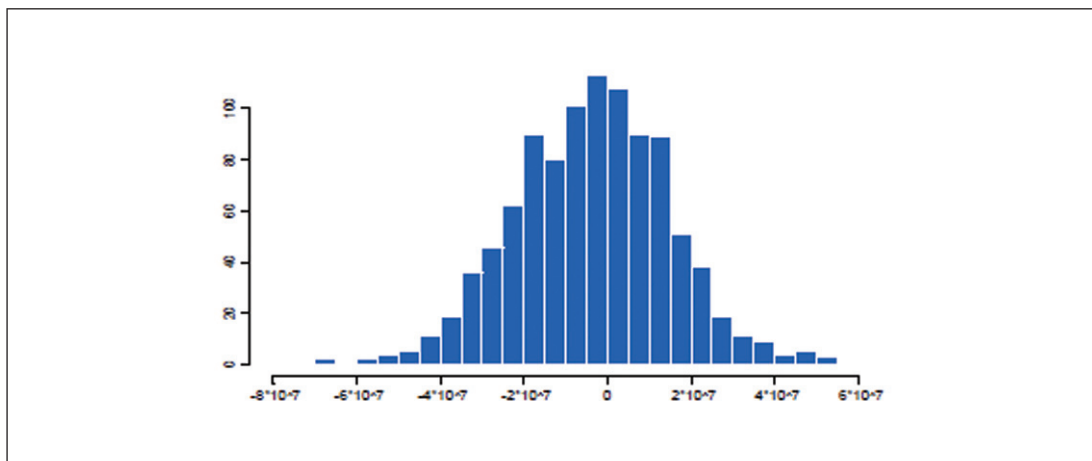


**Figura 6 – Projeções das séries (parte 2)**



Por fim, é apresentado histograma dos  $S=1.000$  valores simulados para o RS, representando a distribuição não paramétrica desejada. Os valores simulados para RS já estão convertidos em Reais.

**Figura 7** – Histograma dos valores simulados para o RS



A tabela a seguir apresenta os valores de necessidade de capital, determinados com base no  $TVaR_{\alpha}$  determinado com base nos valores simulados, considerando diferentes níveis de confiança  $\alpha$ .

**Tabela 31** – Valores de necessidade de capital – risco de emissão/precificação

Nível de Confiança ( $\alpha$ )	Necessidade de capital (risco de emissão/precificação)
95,0%	35.224.560,61
97,5%	41.815.730,99
99,0%	48.992.635,47

**Determinação da  
necessidade  
de capital  
para fazer  
frente ao risco  
de subscrição**

Finalmente, podemos determinar a necessidade de capital para fazer frente ao risco de subscrição somando os respectivos valores encontrados nos dois módulos, de risco de provisão de sinistro e de risco de emissão/precificação. Deve-se destacar que esse procedimento tem embutida a hipótese de que a correlação entre os riscos de provisão de sinistros e de emissão/precificação é igual a 1, o que é uma hipótese de certa forma conservadora, mas não absurda.

A seguir, para cada nível de confiança, é apresentada tabela final com a necessidade de capital calculada por cada um dos módulos e o seu valor final, dado pela soma.



**Tabela 32** – valores de necessidade de capital – risco de subscrição (total)

Nível de confiança ( $\alpha$ )	Necessidade de capital (risco de prov. de sinistros)		Necessidade de capital (risco de emissão/precificação)		Necessidade de capital (risco de subscrição total)
95,0%	25.915.837,13	+	35.224.560,61	=	61.140.397,74
97,5%	29.783.861,82	+	41.815.730,99	=	71.599.592,81
99,0%	33.598.169,57	+	48.992.635,47	=	82.590.805,04

## 5. Considerações finais

Houve a preocupação em deixar o modelo descrito de forma que permitisse sua pronta aplicação. A execução do modelo com dados reais colabora no entendimento de como o modelo pode ser implementado. Basicamente, os dois módulos do modelo contemplam as etapas de:

- 1) Ajuste de modelos para os dados observados, sendo estes:
  - a. No Módulo 1: os triângulos de *run-off* de números e montantes de pagamento relativos a sinistros ocorridos, abertos por classes de negócio;
  - b. No Módulo 2: as diferentes séries trimestrais de dados, algumas abertas por classes de negócio, outras gerais da companhia;
- 2) Simulação:
  - a. Determinação da matriz de correlação que mede a dependência linear entre os diferentes triângulos de *run-off*, no Módulo 1, e as diferentes séries trimestrais, no Módulo 2;
  - b. Geração de elementos de uma cópula Gaussiana multivariada, dada a estrutura de dependência medida pela matriz de correlação;
  - c. Simulação de valores ainda não observados (triângulos inferiores complementares aos triângulos de *run-off* no Módulo 1 e projeções dos valores das séries de dados para os próximos quatro trimestres no Módulo 2), fazendo uso dos elementos gerados da cópula Gaussiana, garantindo assim que, em cada simulação de índices, a estrutura de dependência seja observada;
- 3) Determinação de S valores simulados para a PERDA (Módulo 1) e para o RS (Módulo 2), definindo distribuições não paramétricas para tais variáveis;
- 4) Determinação da necessidade de capital para fazer frente aos riscos de provisão de sinistros (Módulo 1) e aos riscos de emissão/precificação (Módulo 2), através do cálculo da medida de risco TVaR aplicada às respectivas distribuições;
- 5) Determinação da necessidade final de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, como a soma dos valores determinados por cada módulo.



Importante ressaltar que o foco deste projeto está no processo de simulação aqui proposto, respeitando estruturas de dependência existentes, através do uso do conceito de cópulas condicionais. Assim, outros modelos podem vir a ser ajustados aos triângulos de *run-off* ou às séries trimestrais, desde que se mostrem mais adequados aos dados de uma companhia específica. Os modelos aqui ajustados surgiram como fruto de várias tentativas com dados de algumas seguradoras, com o objetivo de encontrar modelos que se adequassem relativamente bem a carteiras de diferentes companhias.

Outros pontos podem ainda ser trabalhados e desenvolvidos, em relação a este exercício de modelagem. Por exemplo, em relação à modelagem das estruturas de dependência, pode ser avaliado o uso de outras famílias de cópulas que não a Gaussiana, especialmente tendo em vista que a família Gaussiana pressupõe independência assintótica nas caudas (Sandström, 2011, p.181).

Dessa forma, espera-se que o resultado deste projeto, assim como o os conceitos aqui trabalhados, venham a ser úteis, tanto para reguladores, quanto para companhias que pretendam desenvolver seus próprios modelos, mas que também seja visto como ponto de partida para futuros desenvolvimentos.

## 6. Referências bibliográficas

Sandström, A. (2011). **Handbook of solvency for actuaries and risk managers**: theory and practice. Chapman & Hall/CRC finance series. ISBN 978-1-4398-2130-5.

IAA. (2004). **A Global Framework for Insurer Solvency Assessment**. International Actuarial Association, Ontario, ISBN: 0-9733449-0-3.

AS/NZS 4360:1995. **Standard on Risk Managemet**. Standards Australia & Standards New Zealand.

IAIS. (2011). **Principles, Standards, Guidance and Assessment Methodology**. International Association of Insurance Supervisors, Basel, Outubro.

Cardoso, P. A. (2008). **Uma metodologia para estimação do capital econômico**: incorporação de dependência entre riscos via cópulas. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

A.M.Best. (2004). **Understanding BCAR For Life and Healt Insurers**: A.M.Best's Capital Adequacy Ratio for Life/Healt Insurers and Its Implications for Ratings. Publicação eletrônica (<http://www.ambest.com/ratings/bcar.pdf>) visualizada em fevereiro, 2013.

CEIOPS. (2009). **CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II**: SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk. CEIOPS-DOC-41-09. Outubro.

Cherubini, U; Luciano, E.; Vecchiato, W. (2004). **Copula methods in finance**. Wiley Finance Series, John Wiley & Sons Ltd.

McNeil, A. J.; Frey, R.; Embrechts P. (2005). **Quantitative Risk Management**: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press.



Frees E. W.; Valdez, E. A. (1998). **Understanding Relationships Using Copulas**. North American Actuarial Journal, Volume 2, Number 1.

EMBRECHTS, P.; McNEIL, A.; STRAUMANN, D. (1999). **Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls**. <ftp://magellan-03.math.ethz.ch/hg/users/embrecht/pitfalls.pdf>

Sklar, A. (1959). **Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges**. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, 229-231.

Hardy, M. R. (2006). **An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications**. <http://alm.soa.org/files/edu/C-25-07.pdf>

Hull, J.C. (2002). **Options, Futures, and Other Derivatives**. 5th ed., Prentice Hall.

Hossack, I. B.; Pollard, J. H.; Zehnwirth B. (1999). **Introductory Statistics with Applications in General Insurance**. Second Edition. Cambridge University Press.

Kaas, R. et al. (2008). **Modern Actuarial Risk Theory: Using R**. Second Edition. Springer.

Neto, W. M. L. (2004). **Avaliação do capital baseado nos riscos de subscrição das provisões de sinistro, utilizando modelos Bayesianos**. M.Sc. dissertação, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.

Franklin et al. (2011). **A estrutura a termo de taxas de juros no Brasil: modelos, estimação, interpolação, extrapolação e testes**.

England; P. D.; Verrall, R. J. (2002). **Stochastic claims reserving in general insurance**, British Actuarial Journal. 8, III, 443-544.

de Jong, P.; Heller, G. Z. (2008). **Generalized Linear Models for Insurance Data**. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press.

Ferreira, P. P. (2005). **Modelos de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo**. 2ª edição. Funenseg.

Box, G.; Jenkins, G. (1970). **Time series analysis: Forecasting and control**. San Francisco: Holden-Day.